



Bruno Filipe Paiva Ferreira

***Otimização de topologia de uma placa perfurada por  
um único furo***

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências  
Militares Navais, na especialidade de Engenheiros Navais – Ramo  
de Mecânica



Alfeite  
[2015]





# ESCOLA NAVAL



*talant de bi-faire*



**Bruno Filipe Paiva Ferreira**

***Otimização de topologia de uma placa perfurada por um único furo***

**Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenheiros Navais - Ramo de Mecânica**

**Orientação de:** CTEN EN-MEC Triunfante Martins

**Co-orientação de:** CFR EN-MEC Mota Duarte

O Aluno Mestrando

O Orientador

---

[nome]

---

[nome]

**Alfeite  
2015**



## **Agradecimentos**

Os meus profundos agradecimentos a todos os que, direta e indiretamente, proporcionaram a realização desta dissertação.

A toda a minha família e amigos pela compreensão e apoio ao longo destes anos que se viram muitas vezes privados da atenção de que merecem.

Ao meu orientador, Capitão-Tenente EN-Mec Paulo Triunfante Martins, pelo apoio, orientação e disponibilidade, bem como à transmissão do seu conhecimento.

Ao meu co-orientador, Capitão-de-Fragata Pedro Mota Duarte, pela incansável preocupação e valiosíssimos conselhos e sugestões.

Ao Comandante e restantes oficiais da câmara do NRP *Bérrio* pelo tempo disponibilizado para o trabalho e apoio dado à conclusão desta dissertação.

À Escola Naval e à Marinha que me acolheram e me formaram ao longo destes cinco anos para que eu seja um bom oficial, um bom engenheiro e um bom homem.



## Resumo

Durante a construção dos novos navios da Marinha Portuguesa, os Navios de Patrulha Oceânica (NPO), mais concretamente, durante o desenvolvimento e desenho da estrutura base do navio, verificou-se que as anteparas e os pavimentos teriam de ser, por diversas vezes, trespassados por encanamentos e cabos elétricos.

Na tentativa de reduzir os efeitos negativos dessas passagens na integridade estrutural do navio foram usadas normas de reforço locais aplicando reforços cilíndricos de parede espessa, denominados de canhões.

Porém, o dimensionamento e aplicação desses reforços, apesar de seguirem normas da marinha dos Estados Unidos da América, e terem sido feitos diversos testes e cálculos em elementos finitos, de uma forma geral, foram realizados de uma forma muito empírica.

Assim, é de extrema importância e interesse, recorrendo a elementos finitos, simular diversas placas sujeitas a perfurações com a aplicação de diversos tipos de canhões por forma a analisar e otimizar este problema assim como a localização ótima dessas perfurações.

Esta simulação será efetuada, em primeiro lugar, recorrendo a um *software* informático já existente de análise, recorrendo ao método de elementos finitos, o ANSYS. A análise final e os seus resultados serão tratados e otimizados por um programa elaborado numa plataforma informática denominada por MATLAB.





## **Abstract**

During the construction of new ships of the Portuguese Navy, the Ocean Patrol Vessels (NPO), specifically for the development and design of the vessel's basic structure, it was found that the bulkheads and decks would have to be several times, pierced by pipes and electrical cables.

In an attempt to reduce the negative effects of these passages in the structural integrity of the ship, strengthening local standards were used, applying cylindrical ribs with thick wall, called cannons.

However, the design and application of these reinforcements, despite following Navy standards of the United States of America and the various tests made with finite elements, were carried out in a very empirical way.

Thus, it is of extreme importance and interest simulate, using finite elements, various bulkheads subject to perforations by applying various types of cannons in order to analyze and optimize this problem as well as the optimal location of these perforations.

This simulation is carried out first using an existing software for finite elements analysis, ANSYS. Later, the final analysis will be treated and optimized by a program written in a computer platform called MATLAB.



## Índice

Agradecimentos.....	V
Resumo .....	VII
Abstract .....	IX
Índice de Figuras.....	XV
Índice de Tabelas .....	XIX
Introdução .....	1
1. Revisão bibliográfica.....	3
2. Explicação do método de elementos finitos.....	5
2.1. Conceito.....	5
2.2. Procedimento MEF .....	6
2.3. Modelo Matemático para análise de tensões .....	7
3. Aplicação do MEF utilizando ANSYS .....	13
3.1. Modelo estrutural para Análise Estática .....	14
3.2. Validação do modelo estrutural para cargas axiais .....	18
3.2.1. Exercício Teórico .....	18
3.2.2. Exercício em ANSYS .....	20
3.2.3. Comparação de Resultados .....	21
3.3. Validação do modelo estrutural para cargas normais .....	22
3.3.1. Exercício Teórico .....	23
3.3.2. Exercício em ANSYS .....	24
3.3.3. Comparação de Resultados .....	24
3.4. Análise da Norma MIL STD 219 SH .....	25
4. Validação da ferramenta de elementos finitos .....	35
4.1. Propriedades da antepara.....	35

4.2.	Malha.....	36
4.3.	Criação da Matriz rigidez .....	41
4.4.	Cálculo dos deslocamentos .....	42
4.5.	Cálculo da concentração de tensões máxima .....	43
4.6.	Validação do código .....	44
4.6.1.	Exercício da placa com furo ao centro.....	45
4.6.2.	Exercício da placa com furo ao lado esquerdo .....	45
4.6.3.	Exercício da placa com furo ao topo .....	46
4.6.4.	Exercício da placa com furo no canto inferior direito .....	46
4.6.5.	Conclusões .....	47
5.	Otimização de posição do furo numa placa .....	49
5.1.	Validação do algoritmo .....	50
	Conclusão .....	53
	Trabalhos Futuros .....	53
	Bibliografia .....	55
	Apêndice 1 – Exercício tipo 1 em ANSYS 2D .....	57
	Apêndice 2 - Exercício Tipo 1 em ANSYS 3D .....	62
	Apêndice 3 - Exercício Tipo 2 em ANSYS 3D .....	68
	Apêndice 4 - Exercício Tipo 1 com Reforços em ANSYS 3D .....	74
	Apêndice 5 - Exercício Tipo 2 com Reforços em ANSYS 3D .....	82
	Apêndice 6 – Determinação da complexidade da malha .....	92
	Apêndice 7 – Exercício Placa com furo ao centro em MATLAB.....	96
	Exercício em MATLAB .....	96
	Exercício em ANSYS .....	97
	Apêndice 8 – Exercício Placa com furo no lado esquerdo em MATLAB..	98

Exercício em MATLAB .....	98
Exercício em ANSYS .....	99
Apêndice 9 – Exercício Placa com furo no topo em MATLAB .....	100
Exercício em MATLAB .....	100
Exercício em ANSYS .....	101
Apêndice 10 – Exercício Placa com furo no canto inferior direito em MATLAB.....	102
Exercício em MATLAB .....	102
Exercício em ANSYS .....	103
Apêndice 11 – Código MatLab .....	104
Main.m .....	104
MapaDeNos.m .....	3
coordenadas_polar.m .....	3
matrizrigidez.m .....	9
forca.m.....	10
fronteira.m .....	11



## Índice de Figuras

Figura 1 – Corpo tridimensional sujeito a diversas cargas (Donald, 2013)	8
Figura 2 - Representação esquemática do exercício tipo 1	18
Figura 3 - Esquema exercício tipo 2 (Young et al., 2011).	23
Figura 4 - Reforço de furos em elementos estruturais (U. S. Navy, 1988)	27
Figura 5 - - Evolução da concentração de tensões com o aumento da Profundidade	29
Figura 6 - Evolução da concentração de Tensão Máxima segundo aumento da Profundidade	32
Figura 7 - Evolução da concentração de Tensão no Reforço segundo aumento da Profundidade	32
Figura 8 – Código das condições iniciais. Localização: Main.m	35
Figura 9 – Linhas de código que definem o número de divisões de cada furo.	36
Figura 10 – Código que define a dimensão da “Box” que envolve de cada furo.	37
Figura 11 – Mapeamento dos nós e elementos usando coordenadas polares	38
Figura 12 – Exemplo da malha de uma placa com furo ao centro	39
Figura 13 – Numeração sequencial dos nós de cada elemento	39
Figura 14 – Código que calcula o valor da tensão por elemento e obtém o valor e localização do seu máximo. Localização: Main.m	43
Figura 15 - Definição das propriedades do Material no ANSYS	57
Figura 16 - Plot da área da placa do exercício da Figura 7 no ANSYS	58
Figura 17- Plot da malha do exercício da Figura 7, criada no ANSYS	58
Figura 18 - Tensão de Von Mises	59
Figura 19 - Distribuição da Tensão segundo componente X	60
Figura 20 - Distribuição da intensidade de tensão	60

Figura 21 - Distribuição da máxima tensão principal .....	61
Figura 22- Placa modelada em 3D .....	62
Figura 23- Malha 3D da placa.....	63
Figura 24- Tensão de Von Mises.....	64
Figura 25 - Distribuição da Tensão Normal .....	65
Figura 26 - Distribuição da intensidade de tensão .....	65
Figura 27 - Distribuição da máxima tensão principal .....	66
Figura 28- Placa modelada em 3D .....	68
Figura 29- Malha 3D da placa.....	69
Figura 30- Tensão de Von Mises.....	70
Figura 31 - Distribuição da intensidade de tensão .....	71
Figura 32 - Distribuição da máxima tensão principal, face superior (esquerda) e face inferior (direita).....	71
Figura 33- Exemplo da aplicação do Probe .....	72
Figura 34- Pormenor do anel de reforço de uma das placas .....	75
Figura 35 - Tensão de Von Mises.....	76
Figura 36 - Distribuição da intensidade de tensão.....	76
Figura 37- Distribuição da Máxima tensão principal.....	77
Figura 38 - Tensão de Von Mises.....	77
Figura 39 - Distribuição da intensidade de tensão.....	78
Figura 40- Distribuição da Máxima tensão principal.....	78
Figura 41 - Tensão de Von Mises.....	79
Figura 42 - Distribuição da intensidade de tensão.....	79
Figura 43- Distribuição da Máxima tensão principal.....	80
Figura 44 - Distribuição da intensidade de tensão.....	80
Figura 45 - Distribuição da intensidade de tensão.....	81
Figura 46- Distribuição da Máxima tensão principal.....	81
Figura 47- Pormenor do anel de reforço de uma das placas .....	83
Figura 48- Tensão de Von Mises.....	83
Figura 49- Distribuição da intensidade de tensão .....	84
Figura 50- Distribuição da máxima tensão principal, face superior .....	84



Figura 51- Tensão de Von Mises .....	85
Figura 52- Distribuição da intensidade de tensão .....	85
Figura 53- Distribuição da máxima tensão principal, face superior .....	86
Figura 54- Tensão de Von Mises .....	86
Figura 55- Distribuição da intensidade de tensão .....	87
Figura 56- Distribuição da máxima tensão principal, face superior .....	87
Figura 57- Tensão de Von Mises .....	88
Figura 58- Distribuição da intensidade de tensão .....	88
Figura 59- Distribuição da máxima tensão principal, face superior .....	89
Figura 60 – Análise com 5 divisões por oitavo (40 divisões).....	92
Figura 61 – Análise com 9 divisões por oitavo (72 divisões).....	93
Figura 62 – Análise com 13 divisões por oitavo (104 divisões).....	93
Figura 63 – Distribuição dos vetores deslocamento nodais em MATLAB	96
Figura 64 – Resultados finais apresentados na “ <i>Command Window</i> ” para o caso da placa com furo central. ....	96
Figura 65 - Distribuição dos vetores deslocamento nodais em ANSYS ..	97
Figura 66 – Valor máximo da tensão sentida pela placa na componente X .....	97
Figura 67 – Distribuição dos vetores deslocamento nodais em MATLAB	98
Figura 68 – Resultados finais apresentados na “ <i>Command Window</i> ” para o caso da placa com furo no lado esquerdo. ....	98
Figura 69 - Distribuição dos vetores deslocamento nodais em ANSYS ..	99
Figura 70 - Valor máximo da tensão sentida pela placa na componente X .....	99
Figura 71 – Distribuição dos vetores deslocamento nodais em MATLAB .....	100
Figura 72 – Resultados finais apresentados na “ <i>Command Window</i> ” para o caso da placa com furo no topo.....	100
Figura 73 - Distribuição dos vetores deslocamento nodais em ANSYS .	101
Figura 74 - Valor máximo da tensão sentida pela placa na componente X .....	101

Figura 75 – Distribuição dos vetores deslocamento nodais em MATLAB .....	102
Figura 76 – Resultados finais apresentados na “ <i>Command Window</i> ” para o caso da placa com furo central. ....	102
Figura 77 - Distribuição dos vetores deslocamento nodais em ANSYS .	103
Figura 78 - Valor máximo da tensão sentida pela placa na componente X .....	103

## Índice de Tabelas

Tabela 1 – Tabela dos coeficientes (Young et al., 2011).....	23
Tabela 2- Resultados de reforços para esforços axiais (tensões em $10^6\text{Pa}$ e dimensões em cm) .....	28
Tabela 3 - Resultados dos reforços para esforços normais.....	31
Tabela 4 – Resultados da análise da placa com furo central .....	45
Tabela 5 – Resultados da análise da placa com furo no lado esquerdo. ....	45
Tabela 6 – Resultados da análise da placa com furo no topo .....	46
Tabela 7 – Resultados da análise da placa com furo canto inferior direito .....	46
Tabela 8 – Resultados da tensão máxima e erro associado .....	47
Tabela 9 – Resultados da análise com algoritmo de otimização .....	51
Tabela 10- Relação dos valores máximos de tensão.....	73
Tabela 11 – Tempos de execução em segundos .....	94



## Introdução

Esta Dissertação tem como objetivo a criação de uma ferramenta que permita estudar e analisar estruturalmente as anteparas fragilizadas por perfurações reforçadas por forma a otimizar a distribuição dessas perfurações ao longo de uma antepara, com o objetivo final de minimizar as concentrações de tensão e consequentemente aumentar a sua resistência quando sujeitas a esforços normais, axiais e à flexão, esforços que estão habitualmente sujeitas, estando inseridas no sistema global que é o navio, quer seja a navegar quer seja quando o navio se encontra atracado ou fundeado ou mesmo em situações pontuais que é caso dos alagamentos em compartimentos.

Antes de começar o trabalho prático e os processos de otimização será necessário realizar uma revisão bibliográfica relativa ao projeto estrutural de anteparas fragilizadas, no que diz respeito às forças que são exercidas sobre o navio e sobre o projeto de otimização estrutural usado durante a conceção e idealização do navio.

Após reunir o conhecimento já existente sobre o tema, no capítulo 2 será criada uma linha de raciocínio que passará pela análise teórica da análise de concentração de tensões, nomeadamente no que diz respeito à aplicação e uso do método de elementos finitos (MEF). Numa primeira fase será feita a análise teórica do MEF e numa segunda fase, fazendo uso de um programa CAD/CAE (*computer-aided design/computer-aided engineering*), o ANSYS, será elaborado um modelo estrutural simplificado de uma antepara e posteriormente a sua validação, executando comparações com soluções analíticas já conhecidas, comparando a distribuição dos esforços numa placa fina fragilizada por um furo localizado no seu centro, entre outras situações.

Tendo o modelo base validado e afinado, esse modelo será então utilizado em ANSYS para realizar o estudo de diversos tipos de passagens reforçadas, em particular as apresentadas na norma MIL STD-2189 SH (U. S. Navy, 1988).

Avançando na linha de raciocínio e tendo já o modelo elaborado em ANSYS validado, irá ser elaborado um código informático que criará um modelo que permitirá fazer uma primeira aproximação ao projeto das anteparas fragilizadas. Esse programa será escrito fazendo uso de um *software* informático designado por MATLAB. Os resultados provenientes desse programa serão posteriormente validados, no capítulo 4, com os modelos elaborados em ANSYS anteriormente.

Após ter o modelo computacional validado será necessário incluir no mesmo a função de otimização para que esta ferramenta de análise possa ser utilizada para o projeto ótimo de anteparas em estruturas navais, método que será descrito e explicado no capítulo 5.

Estando num curso de Engenharia é essencial que desenvolva não só as noções teóricas mas também a vertente prática dos fenómenos físicos lecionados ao longo dos cinco anos de curso.

No que toca ao tema desta dissertação, o estudo da concentração de tensões é importantíssimo para um futuro engenheiro naval pois, no mar, toda a estrutura física do navio está sujeita a enormes forças provenientes de todas as direções. Dessas forças resultam esforços que, caso o navio tenha algum defeito, pode resultar num colapso total da estrutura.

Assim sendo, um estudo de análise das tensões em estruturas fragilizadas (anteparas perfuradas), que visa otimizar a resistência a esses esforços, é então de extrema importância e elevado interesse para qualquer pessoa do ramo da engenharia mecânica naval, principalmente se estivermos a olhar numa vertente de projeto.

## **1. Revisão bibliográfica**

A metodologia usada na concepção de novos navios, quer navios mercantes como navios de guerra, tem vindo a evoluir. Cada vez mais se tem passando a utilizar sistemas dinâmicos e automáticos que permitem implementar metodologias de projeto ótimo. Estes sistemas são novas ferramentas que permitem que os arquitetos navais de hoje sejam capazes de projetar com cada vez mais rigor e rapidez.

Hoje o navio é considerado um sistema complexo que integra uma inúmera quantidade de subsistemas juntamente com os componentes que o compõem.

Existem diversas metodologias de otimização umas das quais refere que se deve criar o navio olhando para todo o seu ciclo de vida incluindo a sua atividade operacional. Esse conceito denomina-se por otimização holística que, como referido anteriormente, tem como objetivo desenvolver o navio desde que surge como uma ideia até ao seu abate (Papanikolaou, 2009).

Tradicionalmente o processo de concepção de um navio é dividido em 4 fases: desenvolvimento do conceito, projeto preliminar, projeto de contrato e projeto detalhado (Papanikolaou, 2014). As duas primeiras podem ser agrupadas no que se denomina por projeto base pois serão as especificações criadas nesta fase que ditarão o rumo de toda a concepção do navio.

No que diz respeito ao projeto estrutural do navio, cada vez mais os arquitetos se têm apoiado em programas de análise e modelação. Estes programas utilizam métodos tais como o MEF que permite estudar a concentração de tensões, deformações e tensões de rutura (Rigo, 2001). Mas, sendo o navio um sistema tão vasto e complexo, essa análise é maioritariamente feita numa vertente macro pois a análise de uma plataforma tão grande e vasta representa um enorme dispêndio de tempo computacional. Assim sendo, conclui-se que o estudo estrutural do navio nas fases iniciais de projeto não costuma ir

aos detalhes de cada componente. De modo a ultrapassar este obstáculo os arquitetos regem-se por normas que visam evitar os defeitos estruturais aplicando determinados reforços nos pontos que são considerados críticos. Uma dessas normas é a MIL-STD 2189 (SH), secção 100-1. Esta norma, na marinha dos EUA, determina os tipos de reforços que devem ser utilizados quando, durante a concepção do navio, é necessário perfurar as anteparas por forma a fazer passar encanamentos, condutas de ar ou mesmo cabelagem elétrica (U. S. Navy, 1988).

Estes reforços são definidos por expressões matemáticas empíricas que resultam de gráficos construídos a partir de análise de dados experimentais. Para além das dimensões que são retiradas desses gráficos não serem exatas, ao longo da norma não é especificado o tipo de material usado nos testes, o que poderá significar que os dados retirados possam não ser aplicados ao caso em estudo. Sendo apenas possível retirar dados de uma forma geral e sem grande rigor. Caberá ao arquiteto determinar as dimensões que pretende aplicar para cada abertura.

Assim, os reforços das perfurações em anteparas são dimensionados empiricamente, e dependem da experiência do próprio arquiteto pois, não existindo uma ferramenta específica e rigorosa que permita a análise desse mesmo reforço não há forma de o otimizar.

Este trabalho visa a criação de uma ferramenta de análise que, quando desenvolvida em todo o seu potencial, permitirá a otimização da localização e do dimensionamento dos reforços das perfurações, eliminando assim os possíveis erros de leitura dos gráficos da norma, adicionando uma forma de análise ótima objetiva e dinâmica.



## **2. Explicação do método de elementos finitos**

### **2.1. Conceito**

O método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica matemática que permite a análise de problemas estruturais de elevada complexidade e a obtenção de resultados que, apesar de aproximados, seriam impossíveis de obter fazendo uso das formulações teóricas convencionais.

Esta análise consiste num processo de divisão do problema inicial em pequenos problemas e fazer uso de formulações matemáticas complexas para fazer as ligações entre esses pequenos problemas, mantendo a continuidade, para que, ao solucionar cada um desses problemas de reduzida dimensão e complexidade, e conseguindo unir todas essas soluções, seja possível obter no final uma única solução, a solução aproximada do problema estrutural inicial.

O método e as ferramentas que foram desenvolvidas neste documento poderão ser utilizadas para solucionar inúmeros problemas da vida real, relacionados à engenharia, mais concretamente à área estrutural. Como quaisquer problemas da vida real, para se conseguir analisá-los é necessário aproximá-los a modelos matemáticos. A grande dificuldade nestas transformações são a definição de geometrias complexas ou mesmo de condições fronteira muito específica que tornam impossível a obtenção da solução por modelos analíticos tais como as equações diferenciais e integrais.

## 2.2. Procedimento MEF

A aplicação do MEF na resolução de problemas estruturais tem sido cada vez mais frequente, principalmente com a ajuda da computação. Ao longo dos anos têm sido criadas ferramentas informáticas que têm tornado o processamento do MEF mais rápido e simples, atuando principalmente na resolução mais rápida dos ciclos internos existentes num procedimento MEF que seriam muito complicados de resolver sem a ajuda destas ferramentas.

Um procedimento de análise de elementos finitos (EF) pode ser dividido em diversos passos. Segundo o autor Bryan J. Mac Donald, podemos dividir uma análise de EF em 5 passos (Donald, 2013).

O primeiro passo passa por interpretar o problema numa vertente física, ou seja, deve-se definir primeiro o que realmente se quer analisar, se é a tensão máxima, se é a deformação, etc. e é necessário identificar todas as características da estrutura que irá ser analisada tais como dimensões, material, geometria, cargas aplicadas, defeitos existentes, entre outras. Quanto mais detalhada for esta primeira avaliação do objeto de estudo mais simples será a resolução das equações que se irão desenvolver mais adiante.

Como segundo passo deverá ser determinado o modelo matemático, este ponto mais teórico do problema é essencial para a obtenção da solução final, um erro nesta formulação poderá originar soluções totalmente erradas. Existem diversos fatores que influenciam a seleção do modelo matemático a utilizar. Assim sendo, o modelo pode ser influenciado pela geometria da estrutura, ou seja, se é 1-D, 2-D ou 3-D, se é simétrica e se é maciça ou do tipo casca (*Shell*); pelo tipo de material que a compõe; pelo seu comportamento; pelas cargas a que está sujeita e como estão aplicadas ao objeto; pelas condições fronteira; e pela forma como a estrutura interage com o meio ambiente.

O terceiro passo consiste na criação do modelo de EF considerando que o tipo de elemento e o material do modelo já foram bem definidos no passo

anterior. Este modelo de EF começa na transformação da geometria física definida no início para a formulação matemática definida no passo anterior, ou seja, a estrutura em estudo será dividida em elementos do tipo e comportamentos já definidos criando uma malha onde posteriormente serão aplicadas as condições de carga e de fronteira que também já estão definidas.

Os últimos 2 passos estão relacionados com o processamento computacional. O quarto passo é a obtenção da solução que, conforme o programa escolhido, será utilizado diferentes métodos computacionais. O quinto e último passo, está relacionado com o pós-processamento, ou seja, na extração dos resultados quer em forma numérica ou gráfica, bem como na verificação e validação do modelo que foi escolhido e desenvolvido no início.

### **2.3. Modelo Matemático para análise de tensões**

Seguindo como base teórica as expressões matemáticas e explicações dadas no livro *Practical Stress Analysis with Finite Elements*, de Bryan Mac Donald (Donald, 2013) com o intuito de compreender o modelo matemático, foi necessário iniciar o raciocínio considerando um corpo tridimensional com um volume  $V$  e formado por uma superfície externa  $S_f$ , todos os seus pontos foram definidos por 3 coordenadas,  $x$ ,  $y$  e  $z$  (figura 1).

Esse corpo, estando sujeito a uma força superficial, distribuída por unidade de área,  $f_s$ , sofreu uma deformação. Essa deformação é definida, em qualquer ponto do corpo, pelo conjunto das 3 componentes de deslocamento ( $u$ ), a componente da direção dos  $x$ ,  $u$ , da direção dos  $y$ ,  $v$ , da direção dos  $z$ ,  $w$ .

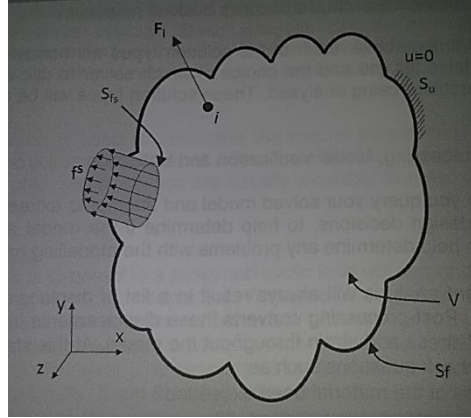


Figura 1 – Corpo tridimensional sujeito a diversas cargas (Donald, 2013)

Visto que se está a considerar a análise no domínio tridimensional a tensão e deformação de cada volume elementar do corpo é formado por 6 componentes:

$$\{\sigma\} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \quad (1)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \quad (2)$$

Se definirmos como pressuposto que o material que compõe o corpo em análise tem um comportamento linear e puramente elástico é possível afirmar, aplicando a lei de Hooke, que é possível calcular a tensão através da deformação, multiplicando esta última pela matriz elasticidade (D) associada ao material.

A matriz elasticidade é específica para cada material pois é obtida a partir de dois parâmetros que caracterizam as propriedades de cada u, o Módulo de Young (E) e o coeficiente de poisson ( $\nu$ ).

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \quad (3)$$

Na resolução de problemas com geometrias complexas é necessário obter o deslocamento do corpo garantindo o equilíbrio das equações pois será necessário calcular equações diferenciais de 2º grau e obter a partir daí as soluções.

Por forma a contornar esse problema, e tornar a análise mais simples, quando se analisa um problema discreto recorrendo a elementos finitos é necessário descarateriza-lo num problema discreto representado por um número finito de elementos que estão interligados por meio de nós nas fronteiras de cada um.

Cada elemento destes terá o seu próprio deslocamento que será calculado tendo em conta o deslocamento de cada um dos seus nós, cada um dos quais por sua vez poderá estar a interligar dois ou mais elementos. Os deslocamentos de cada nó ( $U$ ) são encontrados por meio de funções de forma ( $S$ ), funções estas que são específicas de cada tipo de elemento.

Assim, pode-se concluir que o deslocamento de cada elemento constituinte do corpo em análise é calculado multiplicando as funções de forma do elemento pelo deslocamento de cada um dos seus nós.

Para que se consiga encontrar os valores dos deslocamentos de cada nó é necessário criar 2 matrizes. A matriz rigidez do corpo e a matriz dos vetores de carga.

A matriz rigidez do corpo ( $K$ ) é uma matriz que descreve o comportamento físico de cada elemento e consequentemente representa o domínio de todo o problema. É criada através da matriz elasticidade ( $D$ ) e da matriz deformação-deslocamento (*strain-displacement matrix*) ( $B$ ).

Como referido anteriormente, D relaciona a tensão com a deformação e é calculada para cada elemento pois contém informações sobre o comportamento do material que compõe o corpo, podendo ser este isotrópico (substância que possui as mesmas propriedades físicas, independentemente da direção considerada) ou anisotrópico (certas propriedades físicas tais como rigidez ou resistência mecânica, dependem da direção em que são medidas), D pode variar de elemento para elemento.

A matriz B é uma matriz que relaciona a deformação de cada elemento com os deslocamentos dos nós que o compõem. Esta matriz B, para uma análise 2D tem as dimensões de  $3 \times 2n$ , onde n é o número de nós por elemento. Esta matriz contém as derivadas das funções forma de cada elemento em ordem às variáveis globais (cartesianas  $\rightarrow (x,y)$ ) (equação 4).

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1^e}{\delta x} & 0 & \frac{\delta N_2^e}{\delta x} & 0 & \dots & \frac{\delta N_n^e}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_1^e}{\delta y} & 0 & \frac{\delta N_2^e}{\delta y} & \dots & 0 & \frac{\delta N_n^e}{\delta y} \\ \frac{\delta N_1^e}{\delta y} & \frac{\delta N_1^e}{\delta x} & \frac{\delta N_2^e}{\delta y} & \frac{\delta N_2^e}{\delta x} & \dots & \frac{\delta N_n^e}{\delta y} & \frac{\delta N_n^e}{\delta x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

No caso específico de um elemento quadrático de 4 nós, a matriz B resulta da multiplicação de uma matriz A, que contém o resultado das derivadas dos deslocamentos no interior do elemento, em termos das coordenadas locais (naturais  $\rightarrow (\xi, \eta)$ ) em ordem das coordenadas globais (equação 5), e uma matriz G que contém as derivadas das funções forma em ordem às coordenadas locais (equação 6).

$$A = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$G = \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (6)$$

O J é a matriz jacobiana que traduz a relação existente entre as coordenadas globais e as locais, relação que se torna essencial para que se possa no final obter o resultado final após o cálculo de todos resultados de cada elemento (equação 7).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} & \frac{\delta z}{\delta \xi} \\ \frac{\delta x}{\delta \eta} & \frac{\delta y}{\delta \eta} & \frac{\delta z}{\delta \eta} \\ \frac{\delta x}{\delta \zeta} & \frac{\delta y}{\delta \zeta} & \frac{\delta z}{\delta \zeta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Tendo as matrizes B e D definidas é possível então calcular a matriz rigidez de cada elemento ( $k_e$ ):

$$k_e = [B]^T [D] [B] \quad (8)$$

Sabendo todas as matrizes rigidez de todos os elementos é necessário agora uni-las por forma a criar uma matriz global, a matriz rigidez do corpo (K).

As cargas aplicadas no corpo têm uma localização específica e isso significa que estão aplicadas em nós específicos.

Sabendo a distribuição das cargas pelos nós que constituem o corpo em análise é possível criar uma matriz coluna (F) com todos os nós, onde estão identificados aqueles que estão sob influência das cargas aplicadas.

É possível então determinar os deslocamentos nodais através da seguinte fórmula:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (9)$$

Pode então calcular-se a deformação e posteriormente a tensão em todos os elementos, ou seja, a tensão que é sentida ao longo de todo o corpo:

$$\{\varepsilon_m\} = [B]\{U\} \quad (10)$$

$$\{\sigma_m\} = [D_m]\{\varepsilon_m\} \quad (11)$$



### **3. Aplicação do MEF utilizando ANSYS**

Para aplicação e desenvolvimento do método de elementos finitos existem diversas ferramentas informáticas comerciais. Neste trabalho foi utilizado o ANSYS, que é uma plataforma comercial para modelação e análise recorrendo a elementos finitos. Esta plataforma possui diversas capacidades e pode ser aplicada em diferentes áreas da engenharia. Com o ANSYS é possível modelar problemas estáticos ou dinâmicos, acústicos, de transferência de calor, mecânica de fluidos, e outros. Contudo, assim como a maior parte das ferramentas deste género, não é automática. Isto significa que toda a preparação e modelação do problema tem que ser efetuada pelo utilizador, podendo levar a resultados errados ou pior, poderá gerar resultados aparentemente corretos que no fim poderão gerar erros.

Pela razão acima descrita, torna-se essencial a criação de um modelo de trabalho que permita minimizar estes erros e que torne a resolução dos problemas o mais automático e constante possível. Os problemas que irão ser abordados ao longo deste trabalho serão análises estáticas e os esforços considerados serão axiais e normais. Estas cargas estarão aplicadas sempre em placas de espessuras muito pequenas quando comparadas com o comprimento e largura (anteparas não reforçadas). Assim sendo, toda a metodologia que se desenvolveu daqui para a frente foi inteiramente para problemas deste tipo, garantindo então a veracidade dos resultados para estes casos, podendo ser aplicado em resoluções de outras situações mas não garantindo resultados certos ou considerados aceitáveis.

### **3.1. Modelo estrutural para Análise Estática**

As análises estruturais estáticas que se desenvolveram seguiram uma divisão em 3 etapas gerais: Pré-processamento, Solução e Pós-processamento, seguindo o trabalho de Lawrence (Lawrence, 2012). O Pré-processamento, como etapa inicial, é composto por diversos passos intermédios. Foi nesta etapa que se definiu todo o conhecimento sobre o problema até ao momento. Foi também definido o tipo de elementos a utilizar na análise, as propriedades dos materiais utilizados, modelagem do objeto em estudo, definição da malha, definição das ligações, condições fronteira e cargas.

Ao longo da análise das diversas situações que se seguiram, os objetos de estudo consideraram-se compostos todos pelo mesmo material, o qual é o aço comum, material utilizado na construção naval e na maioria dos navios da nossa esquadra. Assim, as propriedades do material são uma constante ao longo deste trabalho, e a utilização de diversos materiais está fora do seu âmbito.

As características mais relevantes que foram determinantes e necessárias para que o comportamento da matéria no modelo computacional fosse o mais real possível foram o coeficiente de poisson e o Módulo de Young do aço. O coeficiente de poisson ( $\nu$ ) do aço utilizado será de 0,3 e o Módulo de Young (E) de  $210 \times 10^9$  Pa. Para além disso, foram descartados qualquer tipo de defeitos de fabrico das anteparas, isto é, foi considerado que todos os objetos em estudo eram isotrópicos, apresentando um comportamento linear, e que as deformações foram puramente elásticas.

Nesta etapa e por forma a conseguir analisar o modo como as cargas atuam no corpo foi necessário preencher o objeto criado com uma malha composta pelos elementos escolhidos anteriormente.

A forma como se cria essa malha está dependente dos critérios do utilizador. Por um lado, a utilização de uma malha mais grosseira (elementos de grandes dimensões e em número reduzido) resultará numa análise defeituosa, por outro, a utilização de uma malha mais fina (elementos mais pequenos e em maior quantidade) resultará num esforço computacional muito grande que poderá inviabilizar o estudo de diversas opções em projeto mecânico.

Assim sendo, foi necessário encontrar um meio-termo e ter em conta as zonas onde era espectável encontrar concentração de tensões mais elevadas por forma a refinar a malha na vizinhança dessas áreas.

No fim de definir as cargas e condições fronteira a que o objeto esteve sujeito passou-se para a segunda etapa, a “Solução”.

Nesta etapa, o ANSYS tenta encontrar uma solução para o problema definido anteriormente e, se houver algum erro ou inconsistência nos dados definidos no pré-processamento, é aqui que estes serão detetados.

Após encontrar a solução do problema passou-se para a etapa de pós-processamento. Nesta última, foi possível efetuar a pré-visualização da solução encontrada e retirar daí todas as informações e resultados que se pretendiam. Foi necessário verificar, em grande escala, a deformação provocada no objeto para ter a certeza que o comportamento deste estava dentro do espetável, validando assim as condições fronteira e sentido das cargas aplicadas, definidas no início.

O ANSYS sendo uma ferramenta que pode ser utilizada em inúmeras situações, disponibiliza diversos tipos de análises de tensões, o que implica um cuidado acrescido na escolha dos resultados para que os resultados retirados não sejam errados, ou mesmo que estejam certos, é fundamental que sejam os mais aproximados dos reais.

O ANSYS dá-nos diversas hipóteses de análise. Uma vez que foram utilizadas análises em 2D e 3D, foram usados três tipos de análise de tensões com o objetivo de se conseguir estudar qual o melhor método a usar. Os tipos de análise escolhidos foram:

- Máxima tensão principal:

Esta tensão é obtida considerando a tensão de corte nula. Assim sendo, a expressão matemática que permite calcular a máxima tensão principal é:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (12)$$

(Mascia, 2006)

- Intensidade de tensão:

A intensidade de tensão é um valor que resulta do maior valor absoluto das diferenças entre as 3 tensões principais,  $|\sigma_1 - \sigma_2|$ ,  $|\sigma_2 - \sigma_3|$ ,  $|\sigma_3 - \sigma_1|$ , ou seja:

$$\sigma_I = MAX(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) \quad (13)$$

- Tensão de Von Mises:

A tensão de Von Mises é também denominada pela tensão equivalente e está relacionada com as tensões principais através da seguinte expressão:

$$\sigma_e = \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \quad (14)$$

Como será explicado à posteriori, a tensão associada a apenas uma componente é indicada para exercícios 2D onde os efeitos das cargas aplicadas no objeto apenas são sentidos num plano.

Tanto a máxima tensão principal como a intensidade de tensão e a tensão de Von Mises foram, as que melhor se ajustaram às soluções encontradas teoricamente, como foi possível verificar nos exemplos estudados.

Neste capítulo foi colocado em análise uma série de situações onde a solução analítica foi facilmente determinada com o uso de equações teóricas por forma a encontrar a melhor forma de apresentação de resultados quando se reproduziu as mesmas situações no ANSYS. Este processo foi extremamente importante para validar os métodos utilizados, o que permitiu um maior grau de confiança nos resultados da análise de problemas mais complexos

Visto estar-se a falar de anteparas perfuradas, neste primeiro exercício foi estudado o comportamento de uma placa plana retangular fragilizada com um furo no centro. As fórmulas analíticas utilizadas na resolução deste exercício e dos seguintes foram retiradas do livro de fórmulas de *Roark's* (Young, Budynas, & Sadegh, 2011).

## 3.2. Validação do modelo estrutural para cargas axiais

### 3.2.1. Exercício Teórico

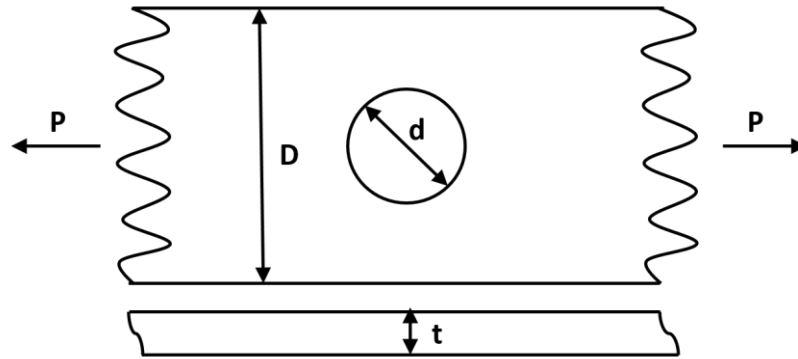


Figura 2 - Representação esquemática do exercício tipo 1

Para a resolução do exercício 1 apresentado na figura 1, a placa tinha as seguintes dimensões:

- Diâmetro do furo ( $d$ ) = 0,4m
- Largura da placa ( $D$ ) = 1,2m.
- Espessura da placa ( $t$ )= 0,01m
- Carga ( $P$ ) =  $10 \times 10^3$  N

Como é possível verificar na figura 1, no exercício foi considerado uma placa com o comprimento infinito, um parâmetro que não foi possível definir no ANSYS. Esta limitação introduziu erros no resultado final. Por forma a minimizar esse erro aumentou-se o comprimento da placa para uma ordem de grandeza superior à da largura, ou seja, neste exercício, quando se passou para modelação em ANSYS, o comprimento da placa passou a ser de 12m.

Tratando o exercício do ponto de vista analítico, utilizando as fórmulas de *Roak's*, foi necessário, em primeiro lugar, garantir a seguinte premissa para poder utilizar a expressão (Young et al., 2011):

$$0 \leq \frac{d}{D} \leq 1 \rightarrow \frac{0,4}{1,2} = 0,3(3) \quad (15)$$

Tendo cumprido a premissa anterior foi necessário calcular o fator de concentração de tensões ( $K_t$ ):

$$K_t = 3,000 - 3,140 \left(\frac{d}{D}\right) + 3,667 \left(\frac{d}{D}\right)^2 - 1,527 \left(\frac{d}{D}\right)^3 \cong 2,3042 \quad (16)$$

A tensão nominal da placa foi determinada pela seguinte fórmula:

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{[t(D - d)]} = 1,25MPa \quad (17)$$

Assim sendo, foi possível calcular a concentração de tensões máxima que, teoricamente, seria no ponto A:

$$\sigma_{max} = \sigma_A = K_t \cdot \sigma_{nom} = 2,88MPa \quad (18)$$

### 3.2.2. Exercício em ANSYS

Uma vez finalizado o cálculo analítico, pretendeu-se reproduzir o exercício no ANSYS e comparar os resultados para validá-lo.

Tendo em conta que se está a considerar uma placa com espessura muito inferior às restantes dimensões e apenas sujeita a cargas axiais pode-se tratar este exercício como um problema 2D bastante simples. Para tal, a primeira abordagem foi feita com recurso ao *"Mechanical"* do ANSYS onde foram selecionados elementos quadráticos com a espessura como uma constante definida.

Visto que a placa no exemplo apresentado esteve sujeita a duas forças opostas, a sua representação em ANSYS pode ser feita de 3 formas distintas:

- i) Une-se os nós de cada aresta de modo a que ambos se comportem da mesma maneira e aplica-se a força num desses nós;
- ii) Divide-se a força ao longo de todos os nós;
- iii) Calcula-se a pressão resultante dessa força, aplicando-a na face da placa.

Escolhendo a última hipótese, a pressão foi facilmente calculada da seguinte forma:

$$\sigma = \frac{P}{t \cdot D} = 833333,3(3)Pa \quad (19)$$

Depois de modelar e definir todos os parâmetros (comandos completos no apêndice 1), os resultados obtidos foram os seguintes:

- Von-Mises:  $2,83 \times 10^6$  Pa
- Tensão segundo a componente X:  $2,84 \times 10^6$  Pa
- Máxima Tensão principal:  $2,84 \times 10^6$  Pa
- Intensidade de tensão:  $2,84 \times 10^6$  Pa



Como mais à frente foram tratadas situações mais complexas, a análise simples em 2D não foi possível. Assim sendo, tornou-se pertinente executar a mesma análise anterior mas construindo a placa em 3D.

Para isso utilizou-se o "*Workbench*" do ANSYS e, após a modelação de todo o problema (comandos completos no apêndice 2), utilizando neste caso, para a criação da malha, elementos 3D tetraédricos, chegou-se aos seguintes resultados:

- Von-Mises:  $2,86 \times 10^6$  Pa
- Tensão Normal:  $2,87 \times 10^6$  Pa
- Máxima Tensão principal:  $2,87 \times 10^6$  Pa
- Intensidade de tensão:  $2,87 \times 10^6$  Pa

### **3.2.3. Comparação de Resultados**

Segundo os resultados da análise em "*Mechanical*" foi possível verificar que, sendo um problema bi-dimensional simples, a análise apenas da componente numa única direção foi válida, bem como todas as outras. O maior erro foi verificado com a análise da tensão de Von Mises, já que o critério utilizado tem em contada a média de todas as tensões resultantes em todas as direções, diferença que eventualmente é diluída com o aumento da complexidade dos problemas.

Comparando agora o valor dado ( $2,84 \times 10^6$  Pa) com a tensão teórica ( $2,88 \times 10^6$  Pa), a diferença entre estes valores foi de  $0,04 \times 10^6$  Pa que equivale a 1,39% do valor analítico.

No que diz respeito à análise em "*Workbench*" do ANSYS, o valor calculado em 3D ( $2,87 \times 10^6$  Pa), comparado com a tensão teórica ( $2,88 \times 10^6$  Pa), a diferença entre estes valores foi de  $0,01 \times 10^6$  Pa que equivale a 0,35% do valor analítico. Valor mais próximo do teórico que a análise 2D mais simplificada.

### **3.3. Validação do modelo estrutural para cargas normais**

Após a verificação anterior, a análise 3D para além de ter permitido elaborar todo o tipo de situações futuras foi possível manter um nível de complexidade tal, que os resultados finais se aproximaram bastante aos teóricos. Posto isso, a partir deste ponto apenas foi utilizado a modelação 3D para elaboração de problemas no ANSYS.

Para além de forças axiais, as anteparas estão também sujeitas a esforços normais. Estes esforços resultam da atuação do peso de uma massa de água diretamente na superfície da antepara. Esta situação acontece permanentemente nas anteparas de tanques de água doce, lastro e combustível; e pontualmente no caso de existir um alagamento de algum compartimento do navio.

No caso real a pressão causada pela água, considerando que o compartimento está completamente alagado, será distribuída pela antepara de uma forma não constante, caso que será simplificado neste trabalho uma vez que a análise da placa sujeita a cargas normais foi feita tendo em consideração que essas cargas teriam uma distribuição regular ao longo da fase da placa. Num caso real, a concentração de tensões tem o seu máximo no ponto da antepara que tem tanto uma elevada coluna de água como uma distância elevada às extremidades que, neste caso, estão fixas ao resto do navio.

Neste contexto, como exercício tipo 2, foi considerada uma placa circular encastrada, com um furo no centro, sujeita a uma carga uniforme normal à sua superfície.

### 3.3.1.Exercício Teórico

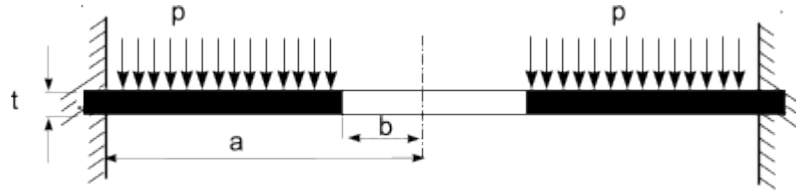


Figura 3 - Esquema exercício tipo 2 (Young et al., 2011).

Para a resolução do exercício 2 apresentado na figura 2, a placa tinha as seguintes dimensões:

- Diâmetro do furo ( $d$ ) = 0,4m
- Diâmetro da placa ( $D$ ) = 2m.
- Espessura da placa ( $t$ ) = 0,01m
- Carga ( $p$ ) =  $50 \times 10^3$  Pa

Para obter a tensão máxima foi necessário obter primeiro o coeficiente de concentração de tensões ( $k_2$ ), retirado da tabela 1. Para entrar na tabela foi necessário saber a relação entre os raios da placa e furo:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{0,2} = 5 \quad (20)$$

a/b											
1,25		1,5		2		3		4		5	
$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$
0,00199	0,105	0,0139	0,259	0,0575	0,480	0,130	0,657	0,162	0,710	0,175	0,730

Tabela 1 – Tabela dos coeficientes (Young et al., 2011).

$$k_2 = 0,730 \quad (21)$$

$$\sigma_m = k_2 \cdot \frac{pa^2}{t^2} = 0,365 \text{ GPa} \quad (22)$$

### 3.3.2. Exercício em ANSYS

Após a modelação de todo o problema (comandos completos no apêndice 3), chegou-se aos seguintes resultados:

- *Von-Mises*:  $0,341 \times 10^9$  Pa, com o valor máximo ao longo da face do furo.
- Intensidade de Tensão:  $0,363 \times 10^9$  Pa, com o valor máximo ao longo do limite externo da placa.
- Máxima tensão principal:  $0,3649 \times 10^9$  Pa, com valor máximo no limite externo da placa.

### 3.3.3. Comparação de Resultados

Comparando o melhor valor dado em 3D com a tensão teórica, a diferença entre estes valores foi de  $0,1 \times 10^3$  Pa, o que equivale a 0,03% do valor analítico.

Com estes exercícios concluiu-se que o modo de aplicação da malha estava correto e que a tensão que se deveria considerar para exercícios futuros seria a Máxima tensão principal.

### 3.4. Análise da Norma MIL STD 219 SH

Esta norma militar americana, criada em 1988, mais concretamente a secção número 100-1, foi concebida para definir as dimensões padrão para o reforço de aberturas em superfícies dos navios de guerra.

Verificou-se que o seu conteúdo é para ser aplicado em todo o tipo de aberturas, desde vigias, passagem de tubagens, cablagens, portas de visita e condutas de ventilação.

Nesta norma são definidas dimensões mínimas para os reforços a utilizar, nomeadamente valores para a espessura do reforço e a profundidade do anel de reforço (figura 4).

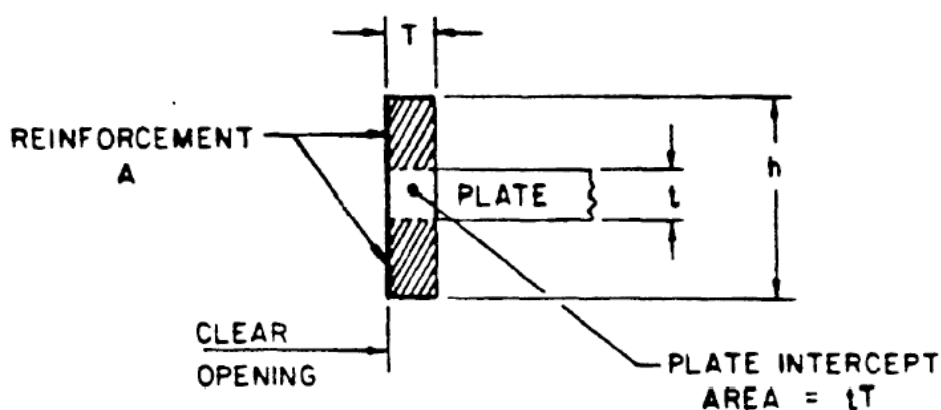


Figura 4 – Esquema de um calhão em corte com respetivas dimensões (U. S. Navy, 1988)

A espessura do anel de reforço ( $T$ ) tem que ser igual ou superior à espessura do elemento que está a ser perfurado ( $t$ ) ou então, caso  $t$  seja menor que  $\frac{1}{4}$  de polegada ( $\sim 0,635 \times 10^{-2} \text{m}$ ), o valor mínimo de referência de  $T$  passa ser  $\frac{1}{4}$  de polegada.

Relativamente à profundidade do anel de reforço ( $h$ ) deverá ser preferencialmente, inferior a  $8T$  e obrigatoriamente inferior a  $16T$ . Segundo a norma,  $h$  terá de ser sempre superior ou igual a  $t + \frac{3}{4}$  de polegada.

Para além destes parâmetros, foi definido, por meio de fórmulas e por meio de um gráfico a área de reforço mínima, não tendo sido apresentado nenhum valor específico de profundidade e espessura para cada tipo de área e reforço.

Assim sendo, após determinar a área de secção mínima foi necessário extrapolar as dimensões necessárias para a criação dessa mesma área. Para verificar o resultado da variação destas 2 dimensões foi utilizado como base o exercício tipo 1 e aplicada a norma para determinar o tipo de reforço que seria necessário aplicar.

Utilizando os valores mínimos da profundidade e da espessura do anel de reforço definidos pela norma foi analisado, em primeiro lugar, se a concentração de tensões diminui significativamente e qual seria a melhor opção que deveria ser utilizada.

Utilizando os valores da espessura ( $0,01m = \frac{3}{8}$  de polegada) e o valor do diâmetro do furo ( $0,40m \sim 15,75$  de polegada) do exercício tipo 1 foi possível entrar no gráfico dado pela norma (figura 5) e retirar o valor a área de secção mínima do reforço a efetuar.

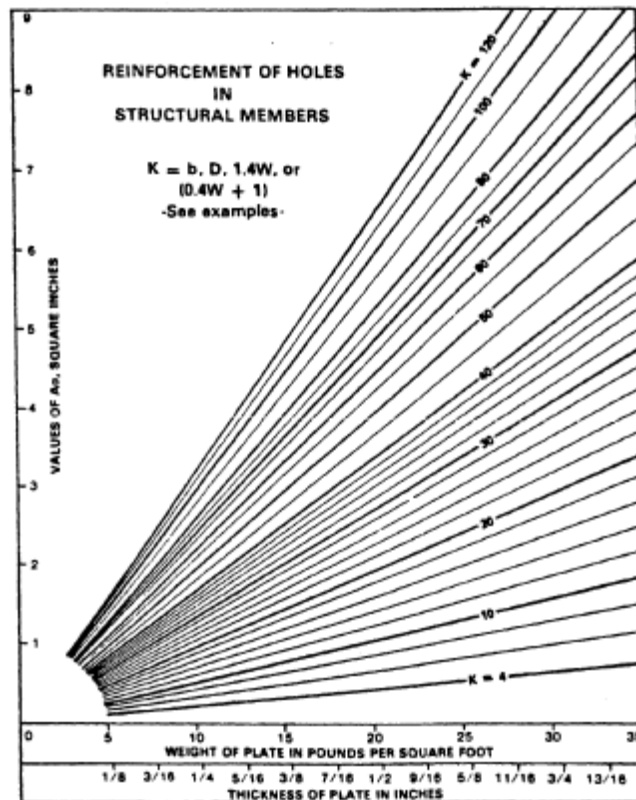


Figura 5 - Reforço de furos em elementos estruturais (U. S. Navy, 1988)

Entrando no gráfico anterior concluiu-se que o valor mínimo para a área de secção do reforço (A) foi de 1,17 polegadas quadradas que é aproximadamente  $5,748 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Foi possível então iniciar a análise das diversas situações por forma a concluir qual seria a melhor relação profundidade/espessura para o reforço a aplicar. Iniciou-se o processo de análise calculando o valor máximo para cada mínimo definido pela norma e mencionado anteriormente e após isso efetuou-se mais duas análises que contemplaram os valores médios das dimensões encontradas antes.

Foram efetuadas 5 análises diferentes em que as únicas variáveis alteradas seriam a profundidade e espessura do reforço, de forma a manter o valor de A constante, e seriam alteradas da seguinte forma:

- 1º.Caso Análise da placa sem qualquer tipo de reforço no furo;
- 2º.Caso Análise da placa com reforço com a espessura mínima (referenciada anteriormente) e consequentemente com a profundidade máxima;
- 3º.Caso Análise da placa com a profundidade mínima (referenciada anteriormente) e consequentemente com a espessura máxima;
- 4º.Caso Análise da placa com a espessura média (média do valor mínimo e máximo já conhecido) e a profundidade correspondente ( $h=A/T$ )
- 5º.Caso Análise da placa com a profundidade média (média do valor mínimo e máximo já conhecido) e a espessura correspondente ( $T=A/h$ );

Após efetuada a análise em ANSYS (processo completo no apêndice 4) obtiveram-se os seguintes resultados:

Tipo de Reforço	Placa Furada sujeita a esforços axiais ( $P=10 \times 10^3$ N)				
	Sem reforço	Espessura mínima	Profundidade mínima	Espessura média	Profundidade média
Máxima Tensão Principal	2,871	1,809	1,897	1,697	1,597
Tensão de Von Mises	2,859	2,303	1,887	1,749	1,816
Tensão de <i>Stress Intensity</i>	2,869	2,655	1,895	1,779	1,994
D. interno	40	40	40	40	40
D. externo	0	42	47,946	44,973	43,196
Profundidade	0	8,548	2,9	4,036	5,724
Espessura anel	0	1	3,973	2,4865	1,598

Tabela 2- Resultados de reforços para esforços axiais (tensões em  $10^6$  Pa e dimensões em  $10^{-3}$ m)

Como foi possível verificar na tabela 2, para apenas uma área de secção mínima, existiam inúmeros reforços que poderiam ser aplicados. Alterando os



valores dessas variáveis e colocando-os de uma forma ordenada obteve-se o seguinte gráfico:

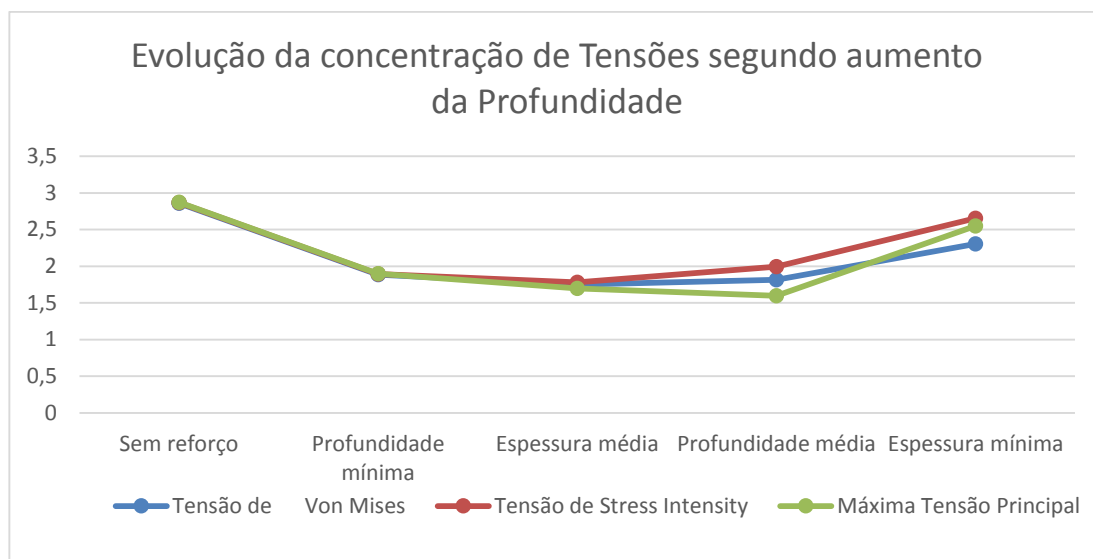


Figura 6- Evolução das tensões (10<sup>6</sup> Pa) para exercício tipo 1

Ao analisar o gráfico representado na figura verificou-se que existia um decréscimo da tensão máxima até um certo ponto (espessura intermédia) e que a partir deste ponto os valores da tensão máxima começaram a elevar-se até se chegar à espessura mínima/profundidade máxima, tirando o caso da máxima tensão principal que o valor mínimo foi quando a profundidade foi média. Em ambos os casos, o valor final (espessura mínima) foi sempre próximo do valor da tensão máxima no caso da placa sem reforço.

Concluiu-se então que, para esforços axiais, a dimensão mais relevante no que toca a diminuir a concentração de tensões à volta do furo circular, foi a espessura do anel de reforço. Apesar disso a profundidade continuou a ser importante e por isso, para que se pudesse garantir um valor de tensão mais baixo possível tornou-se essencial encontrar uma relação entre as duas grandezas sabendo que o valor da espessura estaria sempre o mais próximo do seu valor médio.

Para completar as conclusões foi ainda necessário verificar, para o mesmo furo e para os diferentes reforços, o comportamento da placa sujeita a cargas

normais. Para isso, foi usado o exercício tipo 2 como ponto de partida e posteriormente foi comparado os resultados obtidos com reforço com os resultados obtidos na resolução do capítulo anterior.

Visto que as dimensões do furo e espessura da placa foram as mesmas que as utilizadas na modelação do exercício tipo 1, os valores da área de secção de reforço mínima e os valores da espessura e profundidade mínimas do anel de reforço foram as mesmas. Assim sendo temos:

- $A = 7,548 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
- $h_{\min} = 2,9 \times 10^{-2} \text{ m}$
- $T_{\min} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$

Sendo estas dimensões iguais ao exercício anterior, os valores da dimensão correspondente foram os mesmos, assim como os valores médios. Foi possível então redesenhar a placa circular do exercício tipo 2 com os 4 reforços já calculados e analisar a variação da concentração das tensões neste caso.

No caso teórico da análise da placa sem reforço, foi possível verificar que o valor máximo encontrado anteriormente estava localizado nas suas extremidades. Apesar disso, a inserção de um furo numa antepara real cria uma nova zona de concentração de tensões que tem de ser tida em conta com a aplicação do devido reforço.

Ao aplicar os vários reforços na placa em estudo foram analisados:

- i) Os valores máximos da concentração de tensões em toda a placa;
- ii) Os valores máximos da concentração de tensões no reforço.

Após efetuada a análise (processo completo no apêndice 5) obteve-se os resultados apresentados na tabela 3.

Placa Furada sujeita a esforços normais ( $P=50 \times 10^3 \text{ Pa}$ )
---

	Tipo de Reforço	Sem reforço	Espessura mínima	Profundidade mínima	Espessura média	Profundidade média
Valores Máximos Absolutos (exterior)	Tensão de Von Mises	0,3231	0,2885	0,2824	0,2926	0,2871
	Tensão de <i>Stress Intensity</i>	0,3634	0,3252	0,318	0,3303	0,3233
	Máxima Tensão Principal	0,3649	0,3199	0,3166	0,32	0,3205
Valores Máximos no reforço	Tensão de Von Mises	0,3412	0,1261	0,1668	0,146	0,1431
	Tensão de <i>Stress Intensity</i>	0,3437	0,1455	0,1723	0,1656	0,164
	Máxima Tensão Principal	0,341	0,146	0,1666	0,1725	0,1449
	D. interno	40	40	40	40	40
	D. externo	0	42	47,946	44,973	43,196
	Profundidade	0	8,548	2,9	4,036	5,724
	Espessura anel	0	1	3,973	2,4865	1,598

Tabela 3 - Resultados dos reforços para esforços normais (tensões em  $10^9$  Pa e dimensões em  $10^{-3}$ m)

Como foi possível verificar na tabela 3, para apenas uma área de secção, existem inúmeros reforços que poderiam ser aplicados. Alterando os valores dessas variáveis e colocando-os de uma forma ordenada, obteve-se os gráficos da figura 7 e 8.

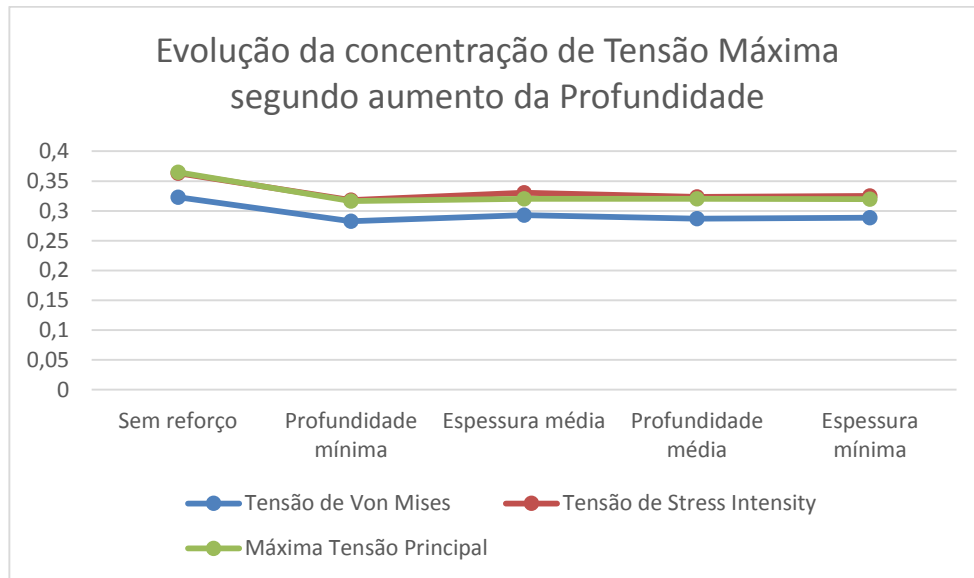


Figura 7 - Evolução da concentração de Tensão (10<sup>9</sup> Pa) Máxima para exercício tipo 2

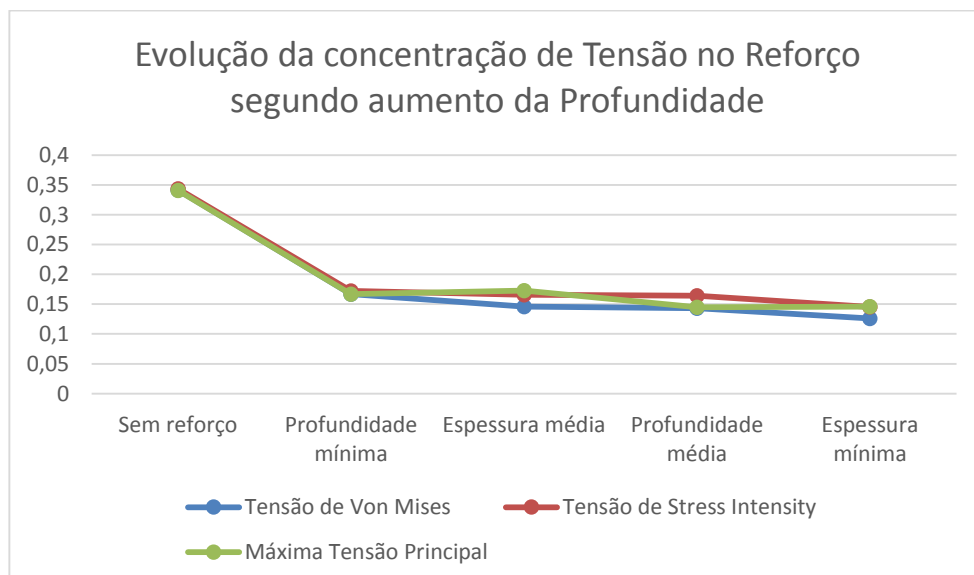


Figura 8 - Evolução da concentração de Tensão (10<sup>9</sup> Pa) no Reforço para exercício tipo 2

Ao analisar a figura 7 verificou-se que, apesar dos diferentes reforços, a variação da concentração de tensão na extremidade encastrada da placa manteve-se praticamente constante.

Relativamente à análise dos gráficos da figura 8, foi possível concluir que, quanto maior for a profundidade menor era a concentração de tensões no anel de reforço e na interface deste com a placa original. Assim, visto que a variação das dimensões do reforço não alteravam a concentração máxima no limite da placa, neste caso, a dimensão mais relevante do reforço a ser aplicado foi a profundidade, a qual deverá tomar o valor máximo admissível.

Em suma, com base nas análises realizadas ao longo deste capítulo, foi possível concluir que a aplicação da norma em estudo durante a modelação de um navio de guerra torna-se muito complicada pois não é trivial encontrar as dimensões perfeitas para os reforços a aplicar às perfurações já que, como foi visto acima, para o mesmo furo existem inúmeras possibilidades de reforços. Adicionalmente, também se concluiu que, apesar da área de secção mínima ter sido a mesma em ambos os casos estudados, para cada tipo de esforço a que a antepara esteve sujeita, a relevância de cada dimensão relativamente à outra altera-se.



## 4. Validação da ferramenta de elementos finitos

Uma vez terminada a validação da ferramenta de análise computacional de elementos finitos, foi possível dar início à fase seguinte, a qual consistia em criar uma ferramenta de elementos finitos que iria ser posteriormente usada na otimização da topologia de placas perfuradas. Como qualquer ferramenta criada num ambiente de simulação, esta careceu de um processo que visou a validação dos resultados obtidos de modo a que as conclusões anteriormente alcançadas pudessem ser igualmente válidas.

Devido à complexidade dos problemas a estudar, estes foram validados fazendo uso do ANSYS, ferramenta de análise que foi validada anteriormente.

### 4.1. Propriedades da antepara

Como foi dito em capítulos anteriores, o objeto base da análise foi uma placa de espessura muito reduzida (possibilita a simplificação da análise de 3D para 2D) feita de aço onde foi feito um ou mais furos redondos. Este foi o ponto de partida para o desenvolvimento do programa. Assim sendo, foram criadas diversas variáveis que abrangem as propriedades físicas e geométricas da placa.

```
4 - %dimensões da placa
5 - comprimento=2; %metros
6 - largura=1; %metros
7 - t=0.01; %espessura (metros)
8 - xe=0.05; %tamanho dos elementos caso estejam livres
  de influências
9 - r=0.1; %raio do furo
10 - % Propriedades físicas da placa
11 - E=2.1e11; %Pa
12 - u= 0.3; %poisson
13 - %erro de contas
14 - erro= 0.00000001;
15 - %coordenadas iniciais
16 - Xi=xe*2+r; ix=1;
17 - Yi=xe*2+r; iy=0;
```

Figura 9 – Código das condições iniciais. Localização: Main.m

## 4.2. Malha

Depois de definir a geometria da placa foi necessário criar a malha de elementos. Os elementos usados em todas as análises que se seguem foram os elementos quadráticos de 4 nós. Estes elementos têm 2 graus de liberdade (X e Y) ideais para análise 2D que corpos sujeitos a forças axiais.

Como foi verificado anteriormente, a criação da malha foi uma etapa que requer bastante cuidado e ponderação, principalmente quando o corpo apresenta uma geometria muito complexa.

A geometria de uma placa retangular pode ser considerada como bastante simples mas essa simplicidade termina quando esta apresenta recortes internos como por exemplo, um furo redondo. Assim, e visto que foram precisamente esse tipo de situações que foram analisadas, foi necessário moldar os elementos por forma a criar uma circunferência o mais perfeita possível, tendo em conta que as arestas dos elementos seriam sempre segmentos de reta.

Considerando que uma circunferência pode ser aproximada a um polígono regular de lados infinitos, formou-se com os elementos constituintes da fronteira do furo um polígono regular de  $n$  lados iguais, lados esses que podem ser alterados dependendo da complexidade de análise que se pretender. Para o programa em questão, foi definido que, sempre que se verificar a existência de um furo, este será dividido em 72 partes iguais (estudo realizado descrito no apêndice 6). O código correspondente a esta definição, o qual poderá ser alterado posteriormente, está disposto nas seguintes linhas da função `coordenadas_polar.m` (figura 10).

```
14 - %numero de divisoes por oitavo de circunferência
15 - ndiv=9;
16 - %numero total de divisões por circunferência
17 - ntotal=ndiv*8;
```

Figura 10 – Linhas de código que definem o número de divisões de cada furo.



Como é visível, para criar esse polígono as coordenadas dos nós dos elementos foram definidas fazendo uso de coordenadas polares, tendo como referência o centro do furo, as quais foram posteriormente transformadas em coordenadas cartesianas. Como a placa era retangular e o furo não estaria necessariamente no centro da mesma, ao usar coordenadas polares surgiram inconsistências geométricas, mais concretamente nas arestas da placa, com o aparecimento de elementos compostos por nós sobrepostos (elementos triangulares). Para contornar esse problema criou-se uma caixa à volta do furo com uma dimensão pré-definida onde os nós constituintes dessa caixa foram todos definidos pelo processo previamente descrito e a área que restou da placa foi preenchida com elementos quadráticos regulares onde a sua largura e/ou comprimentos foram definidos pela largura e/ou comprimento dos elementos da periferia da caixa ou então, caso não haja influência desses, definidos por um valor fixo, que neste caso, é de  $0,05 \times 10^{-3}$  m.

As dimensões da caixa, onde os nós foram definidos por coordenadas polares, foram definidas consoante a localização do furo. Porém, independente do seu tamanho, a caixa manteve-se quadrada. O comprimento do lado foi definido como duas vezes a menor distância compreendida entre o centro do furo e um dos lados da placa, ou seja, das 4 possíveis distâncias (distância em linha reta do centro do furo até às 4 arestas da placa), foi escolhida a menor delas para definir a caixa. Por exemplo, considerando uma placa quadrada com um furo no centro, esta será completamente preenchida por nós definidos por coordenadas polares visto que as distâncias do centro aos lados da placa serão todos iguais. O código que define a dimensão desta caixa está na função `coordenadas_polar.m` (figura 11).

```
8 - %limite max da box à volta do furo
9 - a=[C-X0;X0;L-Y0;Y0];
10 - [pmax,local]=min(a);
```

Figura 11 – Código que define a dimensão da “Box” que envolve de cada furo.

Quando se utilizou o ANSYS para a criação da malha, esta apareceu de modo automático e totalmente definida, sem que fosse necessário nenhuma intervenção do utilizador. Para que esta última situação pudesse ser assegurada na ferramenta que se desenvolveu, foi necessário definir, para além das coordenadas de cada nó (*coordenadasX*, *coordenadasY*), qual o nó que pertence a cada elemento (*npe*), qual a localização de cada elemento e quais os elementos que seriam adjacentes a cada elemento. Para tal tornou-se necessário numerar cada nó de uma forma sequencial, numerar igualmente os elementos e para além disso, normalizar a leitura, também sequencial, dos nós de cada elemento.

Neste programa, a sequência de criação e numeração dos nós, criada pelo próprio autor, começa pelo oitavo de circunferência que coincide com a secção angular decrescente entre os 90° e 45°, avançando primeiro do interior até à periferia da caixa e depois no sentido horário. Após esta secção, a inferior é criada espelhando a anterior e reajustando a numeração dos nós, obtendo assim um quarto de circunferência. Esta última é seguida pela criação do quarto inferior e por fim a outra metade da circunferência, obtidas da mesma forma, definindo assim a caixa por completo (figura 12).

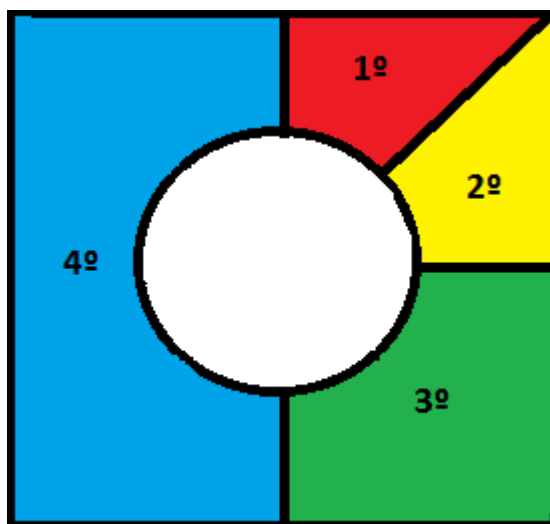


Figura 12 – Mapeamento dos nós e elementos usando coordenadas polares

Após estarem definidos todos os elementos dentro da caixa, o resto da placa que não foi abrangida pela mesma é preenchida obtendo algo semelhante ao representado na figura 13.

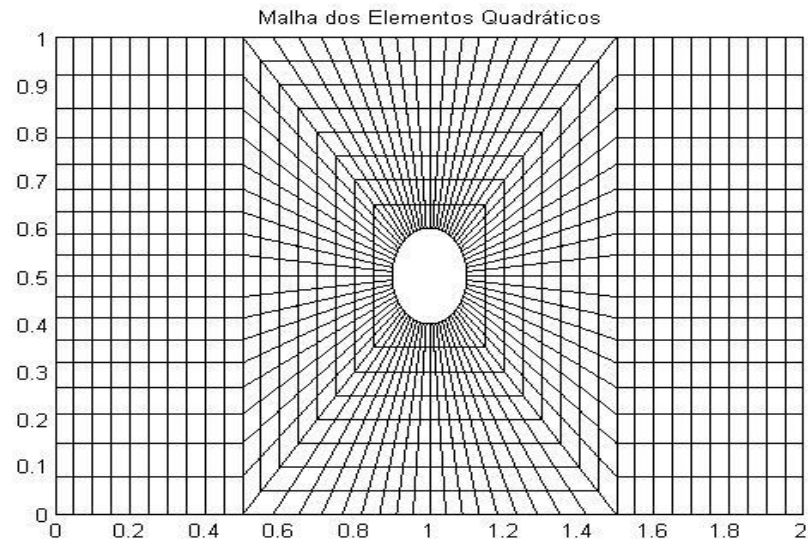


Figura 13 – Exemplo da malha de uma placa com furo ao centro

No que toca à sequência de cada elemento, foi assumida uma sequência para que a pesquisa dos elementos adjacentes se torna-se mais simples. A sequência, começando no canto inferior esquerdo e evoluindo no sentido horário, ficou da seguinte forma: 1,2,3,4 (figura 14). Esta sequência mantém-se independentemente da inclinação dos lados do elemento na malha.

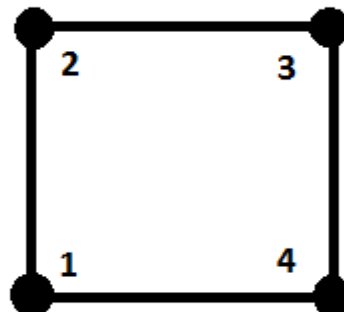


Figura 14 – Numeração sequencial dos nós de cada elemento

Como é possível verificar a criação da malha do ponto de vista de programação computacional é bastante complexa e essa complexidade irá ser traduzida em inúmeras funções com um número elevado de linhas de código o que irá significar um aumento substancial do tempo de execução da análise final. Estas linhas de código estão divididas em 2 funções, `mapa_de_nós.m` e `coordenadas_polar.m`.

Durante toda a execução do programa, verificou-se em inúmeras situações que o MATLAB, devido às suas próprias definições, causa incoerências no que diz respeito à comparação de resultados que teoricamente são nulos mas que nos cálculos do programa são apresentados como próximos de zero. Visto que usando as funções de arredondamento do MATLAB mantêm o problema (números que deviam ser inteiros continuam a ser considerados decimais), numa tentativa de ultrapassar este problema criou-se, neste programa, uma variável *erro* bastante reduzida (0,00000001) que, ao ser subtraída a estes valores que deveriam ser nulos, mas não o são para o *software*, estes tornam-se valores negativos no caso de serem na realidade nulos, podendo assim ser substituídos pelo número zero. Estas situações aconteceram, principalmente, nas divisões que, ao em vez de devolverem um número inteiro, devolveram o mesmo número mas não foi considerado inteiro por natureza mas sim decimal.

### 4.3. Criação da Matriz rigidez

Como explicado no capítulo 2, para realizar uma análise de elementos finitos é necessário a criação da matriz rigidez para cada elemento e posteriormente, a matriz rigidez global que engloba todo o objeto do estudo.

Todo o processo de cálculo foi recriado em diversas linhas de código que, inseridas num ciclo, permitiram a criação da matriz rigidez global (K), linhas essas que estão na função denominada `matrizrigidez.m`.

Foi criada uma função que constrói a matriz rigidez de cada elemento, onde foi usado o método da quadratura de Gauss para duas dimensões, por forma a conseguir um resultado mais fidedigno. As funções forma para o tipo de elemento usado (quadrático com 4 nós), as suas derivadas, o jacobiano, a matriz B e a matriz D, que são expressões matemáticas estudadas anteriormente (capítulo 2), foram utilizadas nesta função tendo como resultado final uma matriz 8 por 8 ( $k_e$ ) referente ao elemento  $n$  da placa em estudo.

Cada matriz  $k_e$  foi depois inserida na matriz global K, matriz quadrada em que o número de linhas e colunas equivalem ao número total de graus de liberdade. Visto que cada elemento foi por si só identificado numericamente assim como os seus nós e graus de liberdade, foi possível encontrar a posição de cada célula da matriz  $k_e$ , na matriz K. Assim, no final obteve-se todas as relações entre elementos inseridas na matriz K.

#### 4.4. Cálculo dos deslocamentos

Um dos passos mais críticos no cálculo analítico de elementos finitos foi o cálculo da deformação da placa. Para que se consiga estimar a deformação geral (da placa) foi necessário saber a deformação existente em cada nó, mais concretamente, o deslocamento resultante de uma condição de carga específica. Essa condição de carga, no caso em estudo, consistiu na aplicação de cargas axiais ao longo das extremidades das placas. Essas cargas foram distribuídas e aplicadas ao longo de todos os nós pertencentes a essas extremidades. Em termos de código, a aplicação foi modelada através de uma matriz coluna (*força*) que representa todos os graus de liberdade existentes onde apenas os que estão sujeitos a cargas têm valores diferentes de zero.

O mesmo se aplica à modelação das condições fronteira, mais propriamente às restrições de deslocamentos que, caso sejam aplicadas numa determinada direção de um determinado nó ( $n$ ) serão refletidas na matriz  $K$  no sentido em que a célula  $(n,n)$  terá o valor unitário (1) e as restantes células da mesma linha e coluna passaram ao valor da restrição que normalmente é zero. O valor unitário foi utilizado, em vez do valor da restrição, para evitar indeterminações quando realizada divisão com matriz *força*.

A técnica descrita acima, utilizada para inserção das condições fronteira na matriz  $K$  foi adaptada de um programa de cálculo de deslocamentos de uma placa lisa, sujeita a esforços axiais, elaborado pelo Siva Srinivas Kolukula, assim como a função que permitiu apresentar os resultados de forma gráfica, função essa que foi diversas vezes utilizada como forma de verificar e validar os resultados obtidos (Kolukula, 2011). Ambas as adaptações foram concluídas após diversos testes que permitiram chegar aos bons resultados que serão apresentados mais a frente e que permitiram igualmente validar essa técnica para o universo de situações abrangidas pelo programa.

Com as condições fronteira devidamente definidas e inseridas nas matrizes indicadas foi possível calcular o deslocamento (U) de cada nó em cada uma das direções em estudo (X e Y), utilizando a expressão matemática (9).

Fazendo uso das funções gráficas do MATLAB foi possível apresentar a placa em estudo e a distribuição dos deslocamentos, ao longo da mesma, numa escala de cores semelhante à utilizada em ANSYS, assim como o intervalo de valores incluindo a apresentação dos valores máximos e mínimos.

#### 4.5. Cálculo da concentração de tensões máxima

Contendo nesta altura todos os dados necessários tornou-se relativamente simples calcular as tensões em cada elemento. Para este cálculo foi usado um *cell array* (B) que contém as matrizes B de cada um dos elementos, foi transformada a matriz deslocamentos global (U) numa matriz de deslocamentos por elemento (Ue) e por fim a matriz elasticidade (D) já calculada anteriormente.

Tendo em consideração as expressões matemáticas 10 e 11 foi criado diversas linhas de código que as reproduzem permitindo assim obter a tensão em ambas as componentes e também a tensão de corte no plano XY de cada um dos elementos que constituem a placa (figura 15).

```
100 - %cálculo das tensões por elemento
101 -     for i=1:nel
102 -         e=B{i,1}*Ue(:,i); %deformação
103 -         tensaoE=D*e; %tensão
104 -         tensaoX(i)=tensaoE(1,1); %tensão em X
105 -         tensaoY(i)=tensaoE(2,1); %tensão em Y
106 -         corteXY(i)=tensaoE(3,1); %tensão de corte XY
107 -     End
108 -     [maxX,elmX]=max(tensaoX); %obter valor e localização
    da tensão maxima
```

Figura 15 – Código que calcula o valor da tensão por elemento e obtém o valor e localização do seu máximo. Localização: Main.m

Tendo o conjunto de todas as tensões sentidas pela placa tornou-se relativamente simples extrair o valor máximo da tensão bem como a localização

dessa tensão. As linhas de código que permitem a ação descrita anteriormente encontram-se na linha 108 da figura 15.

#### **4.6. Validação do código**

Como referido anteriormente, é fundamental comprovar que a análise de elementos finitos realizada pelo programa desenvolvido é válida.

Para o comprovar foi criada uma placa com 2 m de comprimento, 1 m de largura, 0,01 m de espessura e com um furo de 0,1 m de raio ao centro sujeito a 2 cargas axiais opostas de 10000N. Essa placa tinha as mesmas propriedades físicas utilizadas até então e sofreu uma análise pelo programa mas também pelo ANSYS.

Foram consideradas 4 situações:

1. Placa com furo no centro;
2. Placa com furo com as coordenadas (0,5;0,5), ou seja, o seu centro encontra-se sob a linha que divide a placa horizontalmente em duas partes iguais, chegado à aresta esquerda;
3. Placa com furo com as coordenadas (1;0,7), ou seja, o seu centro encontra-se sob a linha que divide a placa verticalmente em duas partes iguais, chegado à aresta de cima;
4. Placa com furo com as coordenadas (1,5;0,3), ou seja, o seu centro encontra-se junto ao canto inferior direito da placa.

Para cada análise foram comparados os resultados referentes à distribuição dos vetores deslocamento (imagem gráfica), os valores máximos e mínimos desses vetores e o valor máximo da tensão segundo a componente X.



Os resultados finais foram analisados por forma a aferir os erros existentes entre as duas ferramentas e por fim para comprovar a validade da ferramenta criada.

#### 4.6.1.Exercício da placa com furo ao centro

Como foi possível verificar no apêndice 7, os deslocamentos sentidos foram bastante idênticos, tendo como resultados a tabela seguinte.

	Vetores Deslocamento (m)		Tensão Máxima (Pa)
	Valor Máximo	Valor Mínimo	
MATLAB	5,00e-05	4,85e-06	2,625e07
ANSYS	5,00e-05	4,97e-06	2,970e07
Diferença	0	0,12e-06	0,345e07

Tabela 4 – Resultados da análise da placa com furo central

Transformando a diferença existente entre as tensões máximas, apresentada na tabela 4, em percentagem, concluiu-se que o erro associado foi de 11,6%.

#### 4.6.2.Exercício da placa com furo ao lado esquerdo

Como foi possível verificar no apêndice 8, os deslocamentos sentidos foram bastante idênticos, tendo como resultados a tabela seguinte.

	Vetores Deslocamento (m)		Tensão Máxima (Pa)
	Valor Máximo	Valor Mínimo	
MATLAB	5,38e-05	2,46e-07	2,702e07
ANSYS	5,38e-05	2,85e-07	3,052e07
Diferença	0	0,39e-07	0,35e07

Tabela 5 – Resultados da análise da placa com furo no lado esquerdo

Transformando a diferença existente entre as tensões máximas, apresentadas na tabela 5, em percentagem, concluiu-se que o erro associado foi de 11,5%.

#### 4.6.3.Exercício da placa com furo ao topo

Como foi possível verificar no apêndice 9, os deslocamentos sentidos foram bastante idênticos, tendo como resultados a tabela seguinte.

	Vetores Deslocamento (m)		Tensão Máxima (Pa)
	Valor Máximo	Valor Mínimo	
MATLAB	5,30e-05	5,26e-06	2,686e07
ANSYS	5,30e-05	5,29e-06	3,120e07
Diferença	0	0,03e-06	0,434e07

Tabela 6 – Resultados da análise da placa com furo no topo

Transformando a diferença existente entre as tensões máximas, apresentada na tabela 6, em percentagem, concluiu-se que o erro associado foi de 13,9%.

#### 4.6.4.Exercício da placa com furo no canto inferior direito

Como foi possível verificar no apêndice 10, os deslocamentos sentidos foram bastante idênticos, tendo como resultados a tabela seguinte.

	Vetores Deslocamento (m)		Tensão Máxima (Pa)
	Valor Máximo	Valor Mínimo	
MATLAB	5,49e-05	8,26e-07	2,793e07
ANSYS	5,48e-05	9,08e-07	3,123e07
Diferença	0,01e-05	0,82e-07	0,33e07

Tabela 7 – Resultados da análise da placa com furo canto inferior direito

Transformando a diferença existente entre as tensões máximas, apresentada na tabela 7, em percentagem, concluiu-se que o erro associado foi de 10,6%.

#### 4.6.5. Conclusões

Como foi possível verificar nas análises anteriores, o erro associado, no que diz respeito aos valores máximos de tensão, manteve-se praticamente constante à medida que se foi alterando a posição do furo.

Os resultados dos vetores deslocamentos foram bastante aceitáveis verificando-se que, no programa, a distribuição destes ao longo da placa foi aproximadamente igual à verificada no ANSYS. Os valores apresentados pelas duas ferramentas tanto máximos, como mínimos, foram muito próximos, verificando-se erros nulos em quase todas análises. Apenas quando os valores mínimos eram muito pequenos verificou-se alguma diferença entre o programa e a análise em ANSYS.

Os erros associados aos valores da tensão máxima foi de uma grandeza que não era verificada quando comprados os valores dos vetores deslocamento. Este caso pode ser explicado pelo facto de o método de cálculo integral usado no programa ter sido a quadratura de gauss, um método de cálculo aproximado de integrais que, ao ser comparado com o método por de trás do *Software* ANSYS, resultou num erro maior nos resultados finais.

	Central	Lado Esquerdo	Topo	Canto inferior direito
MATLAB	2,625e07	2,702e07	2,686e07	2,793e07
ANSYS	2,970e07	3,052e07	3,120e07	3,123e07
Erro	11,6	11,5	13,9	10,6

Tabela 8 – Resultados da tensão máxima (Pa) e erro associado (%)

Compilando as conclusões anteriores, apesar de ter sido apresentado um erro médio de 11.9%, a evolução dos valores máximos da tensão e a sua

localização foi igual à verificada no ANSYS. Assim concluiu-se que é possível validar o código para análises de tensão de uma placa com um furo redondo em qualquer zona, desde que este esteja completamente no seu interior.

## 5. Otimização de posição do furo numa placa

Neste problema específico foi necessário que o furo existente na placa em estudo fosse posicionado em diversos pontos da área delimitada pela placa, por forma a encontrar o local onde resultassem os valores mínimos para a concentração de tensões, ou seja, local que concedesse o mínimo de fragilidade à placa.

Visto que analisar todas as posições possíveis implica um grande esforço computacional e consequentemente um grande gasto de tempo, idealmente seria importante implementar algoritmos que limitassem o número de análises, ignorando posições cujos resultados esperados seriam sempre piores a um certo valor já analisado.

Foi então formulado um algoritmo de otimização com o objetivo final de encontrar a posição do furo onde a tensão fosse mínima:

Objetivo final:

- $\text{MIN}(\sigma_x) \rightarrow \{\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}\} = [D_m][B]\{U\};$

Em relação a:

- Posição do furo  $\rightarrow (X;Y);$

Restrições:

- Posição inicial:
  - $X_0 = r + 2 \cdot x_e;$
  - $Y_0 = r + 2 \cdot x_e;$
- Limites de posicionamento:
  - $X \in [ (r+P1); \text{Comprimento}-(r+P2)];$
  - $Y \in [ (r+P3); \text{Largura}-(r+P4)];$
- Avanço da posição:
  - $(X_0 + \text{índice1}) \leq [\text{Comprimento}-(r+P2)];$
  - $(X_0 + \text{índice2}) \leq [\text{Largura}-(r+P4)];$
- Valores mínimos para as restrições de análise:

- $(P1, P2, P3, P4) \geq 2 \cdot x_e$ ;
- $(P1, P2, P3, P4) \leq \text{comprimento} - (2 \cdot x_e)$ ;

Assim sendo, fazendo uso da análise das tensões foi criado um ciclo com um número pré-definido de iterações onde no final foi selecionada a análise que deteve o valor mínimo da tensão na direção X. A análise pode ou não ser feita ao longo de toda a placa, a posição inicial é pré-definida através de duas variáveis (P1 e P3) que estabelece um limite inferior e lateral esquerdo da "box" onde é feita a alteração de posições do furo. Posteriormente outras duas variáveis (P2 e P4) delimitam os outros 2 lados da "box". Ambas as variáveis têm que ter o valor mínimo de duas vezes o valor do comprimento padrão de um elemento ( $x_e$ ), que no caso em estudo foi de 0,05 m. Este limite mínimo, que depois transparece para o limite máximo, serve para garantir que existe sempre elementos entre as extremidades da placa e o limite do furo. Por forma a impedir análise com o furo fora da placa foi subtraído sempre aos limites, o raio do furo em estudo ( $r$ ).

O avanço da posição do furo na placa é definido por dois índices que são somados às coordenadas do furo anterior até que seja atingido os limites da análise (Limites de posicionamento).

### **5.1. Validação do algoritmo**

Partindo do princípio que se pretende considerar a maior área possível de análise, era de esperar que a placa apresentada no final fosse a que detivesse o furo no seu centro, independentemente da forma como seria feita a alteração da posição do furo.

Por forma a testar o algoritmo foi criada a placa nas condições iniciais até então utilizadas mas desta vez variando a posição do furo. Começou na posição (0,2;0,2), os intervalos de valores em X foram [0,2;1,8], com um avanço de 0,4 e em Y teve os valores compreendidos entre [0,2;0,8], com um avanço de 0,15.

Os resultados obtidos da análise de otimização estão apresentados na tabela seguinte, sendo o último valor o escolhido pelo programa como opção de localização que apresenta a tensão mínima.

Tensão (Pa)	Posição do centro do furo	
	X	Y
36637242	0,2	0,2
31122206	0,6	0,2
31694682	1	0,2
31160540	1,4	0,2
35406648	1,8	0,2
36637242	0,2	0,2
26635356	0,6	0,5
26247214	1	0,5
26611061	1,4	0,5
31477257	1,8	0,5
31500894	0,2	0,5
28180661	0,6	0,8
28448826	1	0,8
28140801	1,4	0,8
40762730	1,8	0,8
26247214	1	0,5

Tabela 9 – Resultados da análise com algoritmo de otimização

Como é possível verificar, o programa percorreu todas as hipóteses possíveis para a localização do furo e no fim escolheu a posição do centro da placa (1;0,5) como situação onde se verificou o mínimo da concentração de tensões.

Visto ser a posição que era esperada, ou seja, a posição correta, foi possível concluir que o processo de otimização funciona e os resultados são válidos.





## **Conclusão**

Durante a elaboração deste trabalho foi necessário ultrapassar diversos obstáculos que, à medida que o trabalho ia avançando, iam ficando cada vez mais difíceis de transpor ao ponto de travarem por completo esse mesmo avanço.

A idealização inicial para este trabalho era elaborar um programa em Matlab que utiliza-se uma metodologia de otimização já existente, juntamente com um código específico para análise de elementos finitos, igualmente já publicados para análise da localização de perfurações de diversas geometrias, estando a antepara sujeita a cargas axiais e normais.

Essa ideia perdurou até que se iniciou a pesquisa para a elaboração do código. Nessa altura foi possível concluir que não existia nenhum código minimamente trabalhado que se adaptasse ao que se pretendia. Isso significou que o código teve que ser criado de raiz.

Este grande obstáculo tornou-se ainda maior quando foi necessário criar uma forma de elaborar a malha com um furo em qualquer localização da placa, visando já a inserção do código de otimização. Foi ainda necessário tornar os deslocamentos nodais em tensões.

## **Trabalhos Futuros**

Desde o início do trabalho que os objetivos finais traçados eram ousados mas devido à importância do mesmo assim necessitavam de o ser. Muito foi feito e muito ficou igualmente por fazer.

Como trabalho futuro de desenvolvimento desta ferramenta será necessário colmatar o código que define a malha para que a análise se torne mais rápida. É necessário criar o código que permita um cálculo mais aproximado da concentração de tensões através dos deslocamentos nodais, estudando outros modos de cálculo de integrais para além do usado (Quadratura de gauss). Além disso será igualmente necessário adaptar o código relativo às iterações que

permitem a otimização posicional para comprar valores de modo a eliminar iterações desnecessárias e evitar que seja preciso analisar todas as posições da placa.

Numa fase mais avançada do desenvolvimento da ferramenta de análise é importante tornar a análise de 2D para 3D por forma a obter resultados produzidos também por cargas normais e condições fronteira que levem a placa de estudo a aproximar-se cada vez mais de uma antepara real.

Por último é importante adicionar uma função que recrie os reforços existentes na norma americana e que otimize as suas dimensões, conforme o estudo feito em Ansys em capítulos anteriores.

## Bibliografia

- Chessa, J. (2002). *Programing the Finite Element Method with Matlab*. Northwestern University, vol.3, 1–45.
- Donald, B. J. Mac. (2013). *Practical Stress Analysis with Finite Elements*. (G. Publishing, Ed.) (2nd ed.). Dublin.
- Ferreira, A. J. M. (2009). *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*. (Springer, Ed.). Universidade do Porto.
- Kolukula, S. S. (2011). The Plane Stress Problem. Mathworks. Retrieved from [www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31788-the-plane-stress-problem/](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31788-the-plane-stress-problem/)
- Liu, K., & Tovar, A. (2014). *An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1175–1196. <http://doi.org/10.1007/s00158-014-1107-x>
- Maciel, R. M. da C. A. (2013). Método dos elementos finitos aplicado à análise de sólidos: concepção e implementação. Lisboa. Mascia, N. T. (2006). *Teoria das Tensões*. Campinas. Retrieved from [www.fec.unicamp.br/~nilson/ApostilaTensao.pdf](http://www.fec.unicamp.br/~nilson/ApostilaTensao.pdf)
- Navy, U. S. (1988). Reinforcement of openings in structure of surface ships. In D. of the Navy (Ed.), *Military Standard - Design Methods for Naval Shipboard Systems section 100-1* (Vol. 2189). Washington, DC.
- Papanikolaou, A. (2009). Holistic ship design optimization. *Computer-Aided Design*, 42(11), 1028–1044. <http://doi.org/10.1016/j.cad.2009.07.002>
- Papanikolaou, A. (2014). *Ship Design - Methodologies of Preliminary Design*. (Springer, Ed.). New York.
- Persson, P.-O., & Strang, G. (2004). *A Simple Mesh Generator in MATLAB*. *SIAM Review*, 46(2), 329–345. <http://doi.org/10.1137/S0036144503429121>
- Rigo, P. (2001). A module-oriented tool for optimum design of stiffened structures - Part I. *Marine Structures*, 14(6), 611–629. [http://doi.org/10.1016/S0951-8339\(01\)00011-9](http://doi.org/10.1016/S0951-8339(01)00011-9)

Young, W., Budynas, R. G., & Sadegh, A. M. (2011). *Roark's Formulas for Stress and Strain, 8th Edition* (8th ed.). The McGraw-Hill Companies.

## Apêndice 1 – Exercício tipo 1 em ANSYS 2D

Neste apêndice é descrito todo o processamento de elaboração do exercício teórico em estudo efetuado no ANSYS desde a definição dos elementos até a apresentação dos resultados.

Definição dos elementos quadráticos de 8 nós:

- Preprocessor/Element Type/Add.../Solid/Quad 8 node 183/Ok

Definir que objeto em estudo 2D com espessura a ser considerada:

- Preprocessor/Element Type/Options.../Element Behavior/Plane stress/thk

Definição do valor da espessura:

Preprocessor/Real Constants/ Add/Edit/Delete /Add.../OK/Thickness/0.01

Atribuição dos valores das propriedades do material:

- Preprocessor/ Material Props/ Material Models/ Structural/ Linear/ Elastic/ Isotropic

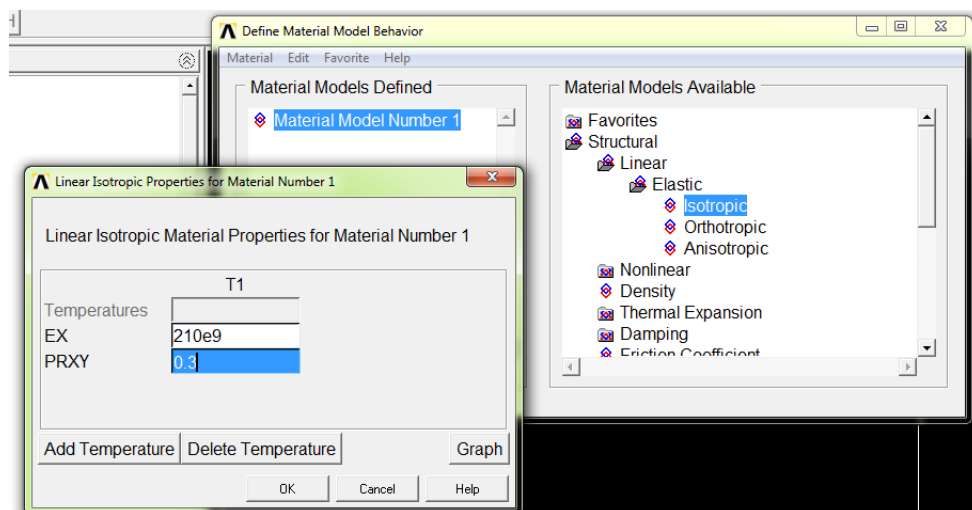


Figura 16 - Definição das propriedades do Material no ANSYS

Modelação da placa em estudo (dimensões definidas anteriormente):

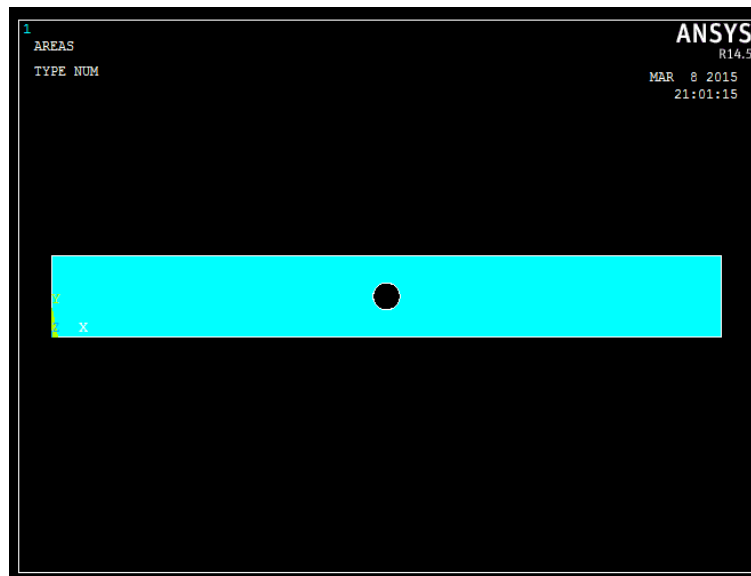


Figura 17 - Plot da área da placa do exercício da Figura 7 no ANSYS

Construção da Malha:

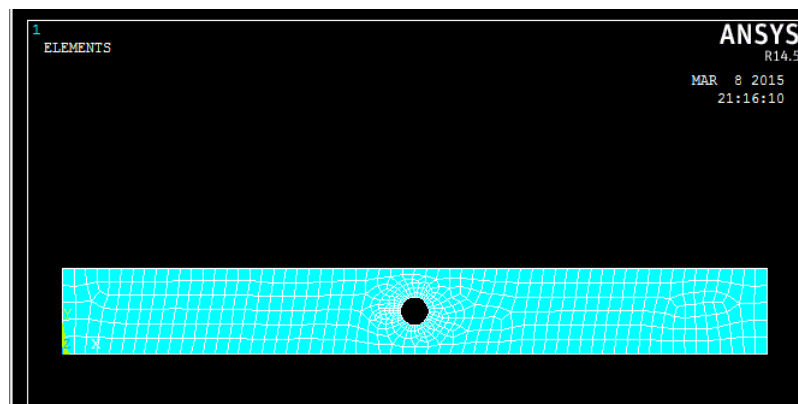


Figura 18- Plot da malha do exercício da Figura 7, criada no ANSYS

Aplicação da pressão nas extremidades da placa:

- Preprocessor/ Loads/ Define Loads/ Apply/ Structural/ Pressure/ On lines / Selecionar linhas/ Ok/ Definir Valor com sinal negativo/ Ok

Pedir que o *software informático* analise e encontre a solução para o problema modelado:

- Solution/ Solve/ Current LS

Sendo encontrada uma solução sem que tenha sido encontrado erros pelo ANSYS, prossegue-se para a verificação dos resultados.

Comando para a verificação das diferentes tensões:

- General Postproc/ Plot Results/ Contour Plot/ Nodal Solu/ Stress/ .....
  - Tensão Von Mises:

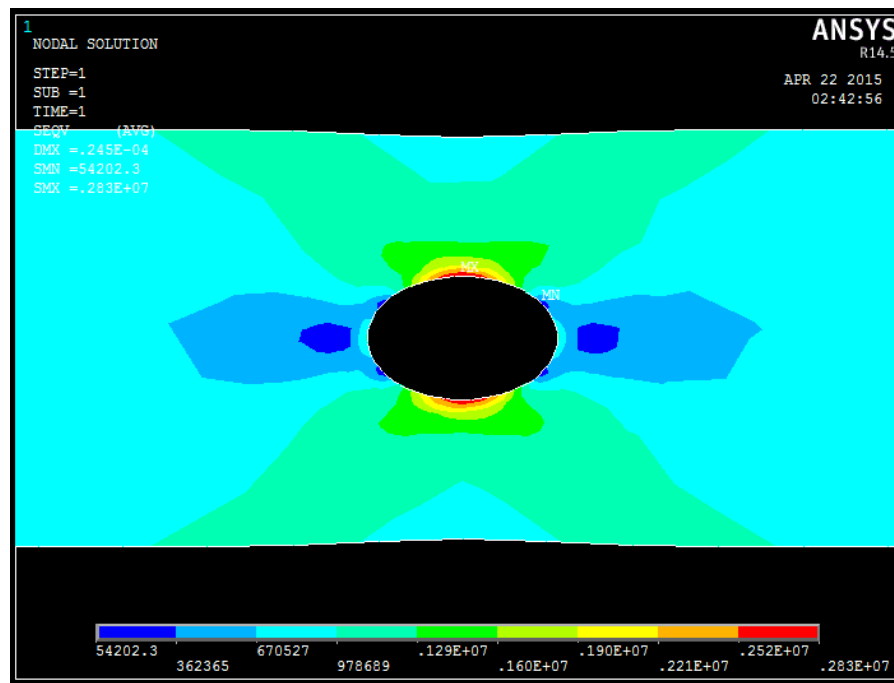


Figura 19 - Tensão de Von Mises (Pa)

- Tensão segundo a componente X:

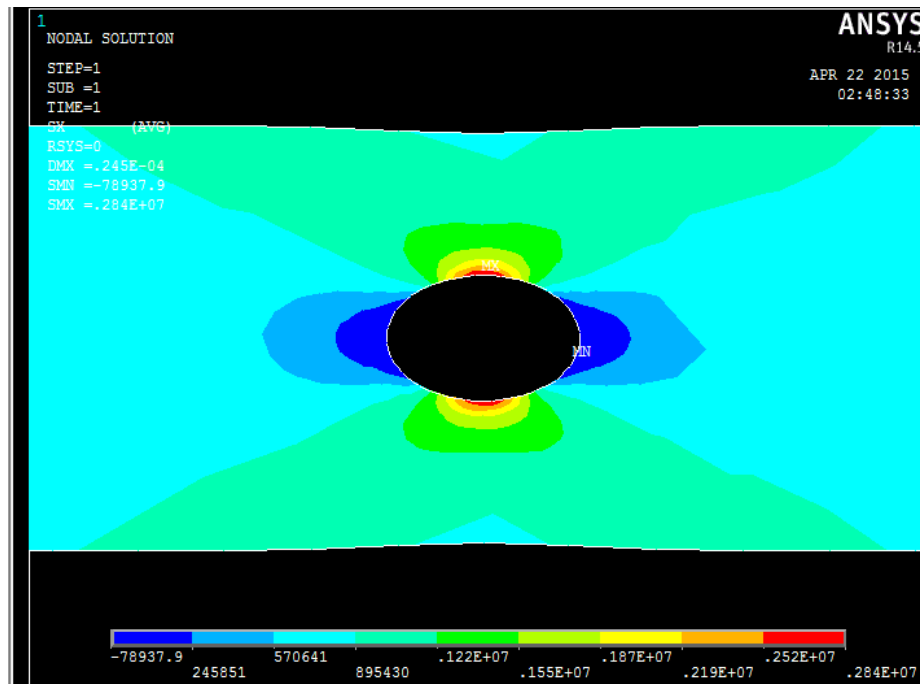


Figura 20 - Distribuição da Tensão segundo componente X (Pa)

- Intensidade de Tensão:

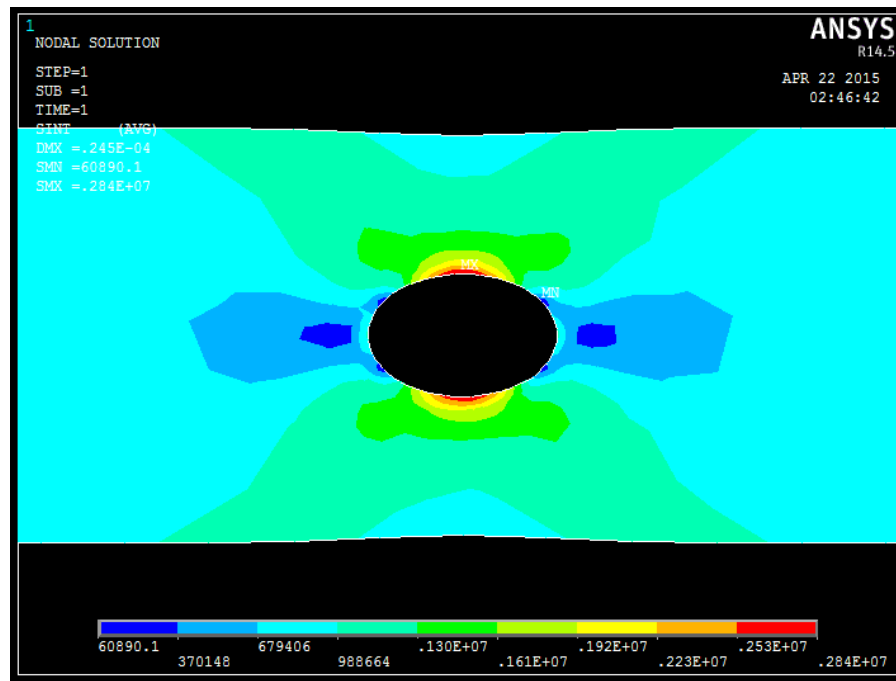


Figura 21 - Distribuição da intensidade de tensão (Pa)



- Máxima tensão principal:

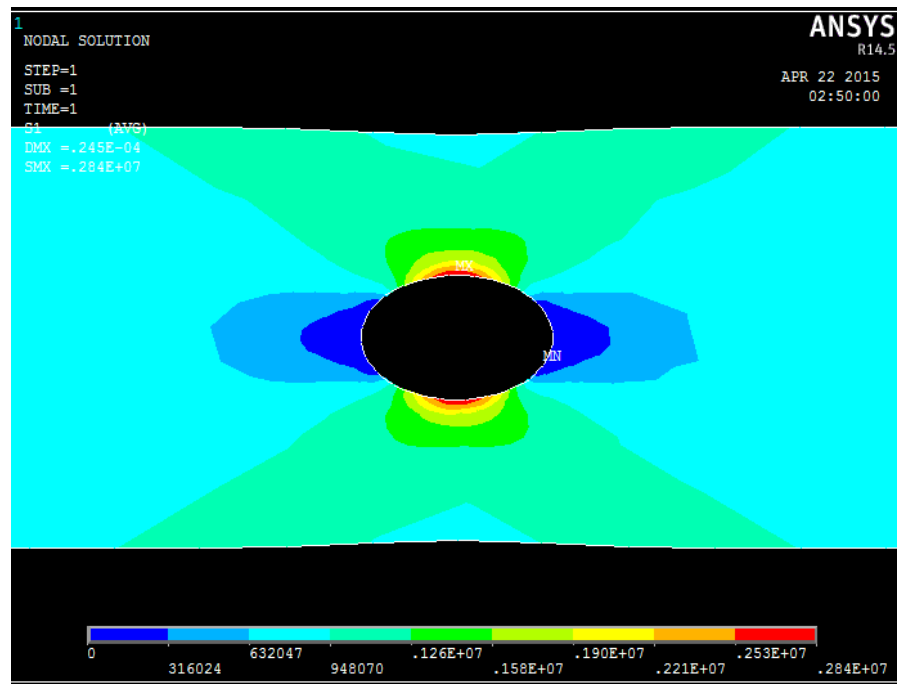


Figura 22 - Distribuição da máxima tensão principal (Pa)

## Apêndice 2 - Exercício Tipo 1 em ANSYS 3D

Neste apêndice irá ser descrito todo o processamento de elaboração do exercício teórico em estudo efetuado no ANSYS desde a definição dos elementos até a apresentação dos resultados.

Definição do sistema de análise:

- *Analysis Systems/ Static Structural/ ok*

Definir material:

- *Engineering Data/ Structural Steel/ Return to project*

Modelação da placa:

- *Geometry/ Abrir DesignModeler(DM)*
- Elaborar *sketch* no plano XY
- Executar um *extrude* de 0,01m
- Fechar DM

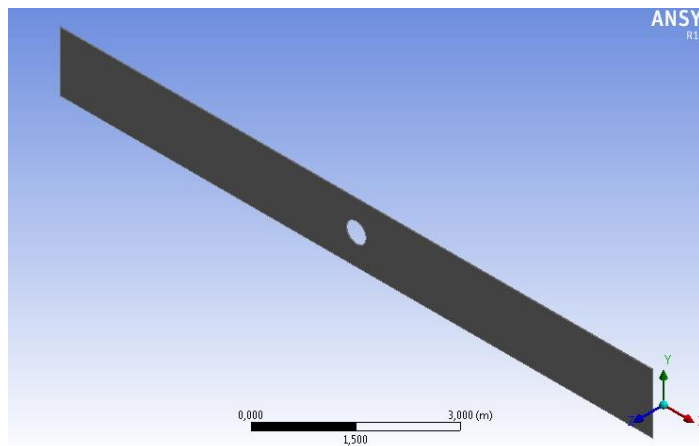


Figura 23- Placa modelada em 3D

Execução da malha:

- *Model/ Abrir "Mechanical"*
- *Mesh/Sizing*
  - *Relevance Center: Medium*
  - *Smoothing: Medium*
  - *Transition: Slow*
  - *Span Angle Center: Medium*

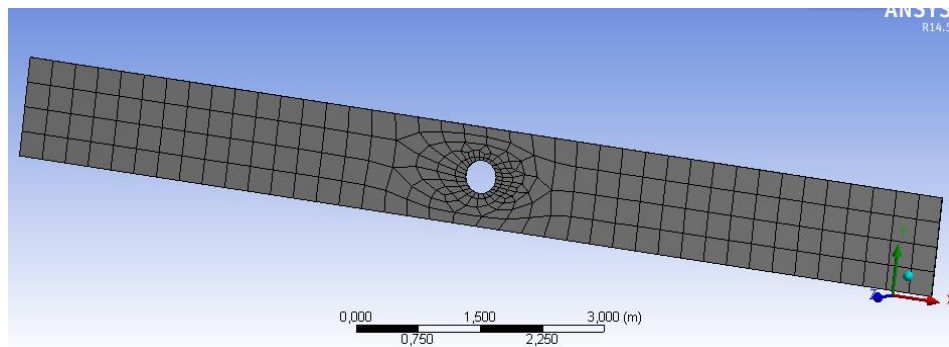


Figura 24- Malha 3D da placa

Definição da Pressão aplicada nas faces da placa:

- *Static Structural/ Loads/ Pressure*
  - *Geometry:* Seleccionar 2 Faces
  - *Magnitude:* -833333,33 Pa

Encontrar solução para as diferentes análises de tensões:

- *Solution/ Stress/*
  - *Equivalent Stress*
  - *Normal Stress*
  - *Stress Intensity*
  - *Maximum Principal Stress*
- *Solve*

Apresentação dos resultados obtidos:

- Tensão equivalente (Von Mises):

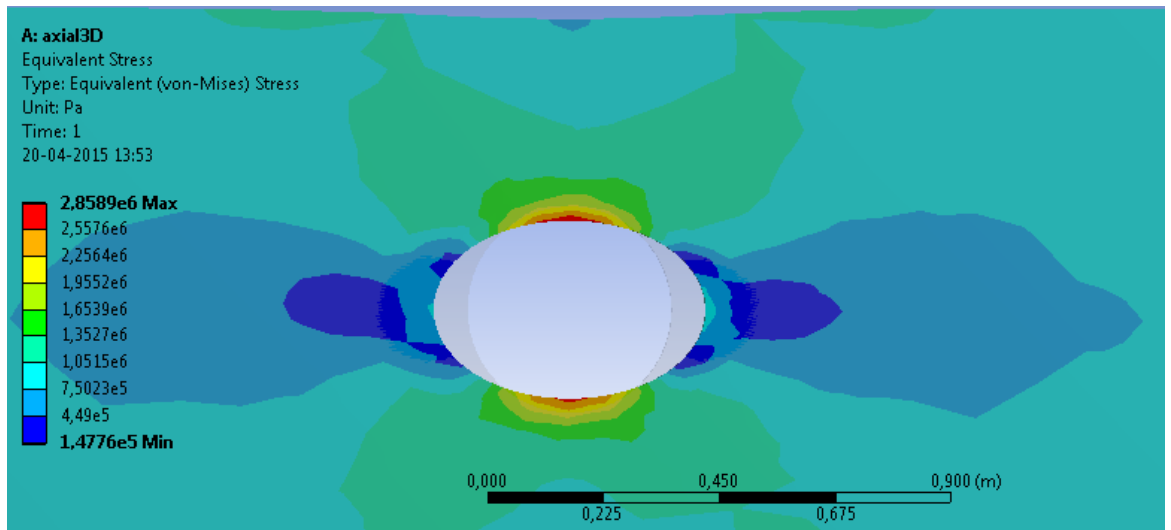


Figura 25- Tensão de Von Mises (Pa)

- Tensão normal:

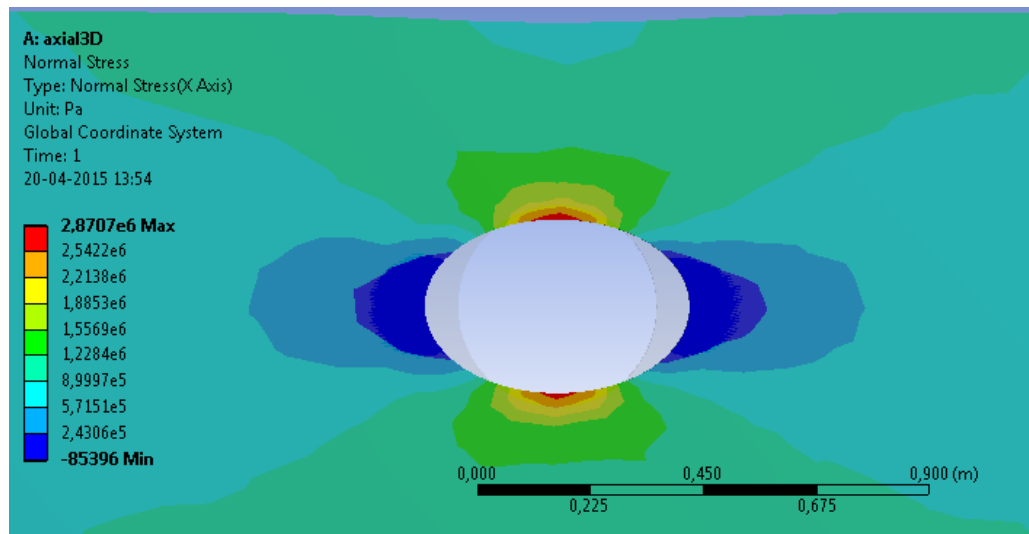


Figura 26 - Distribuição da Tensão Normal (Pa)

- Intensidade de Tensão:

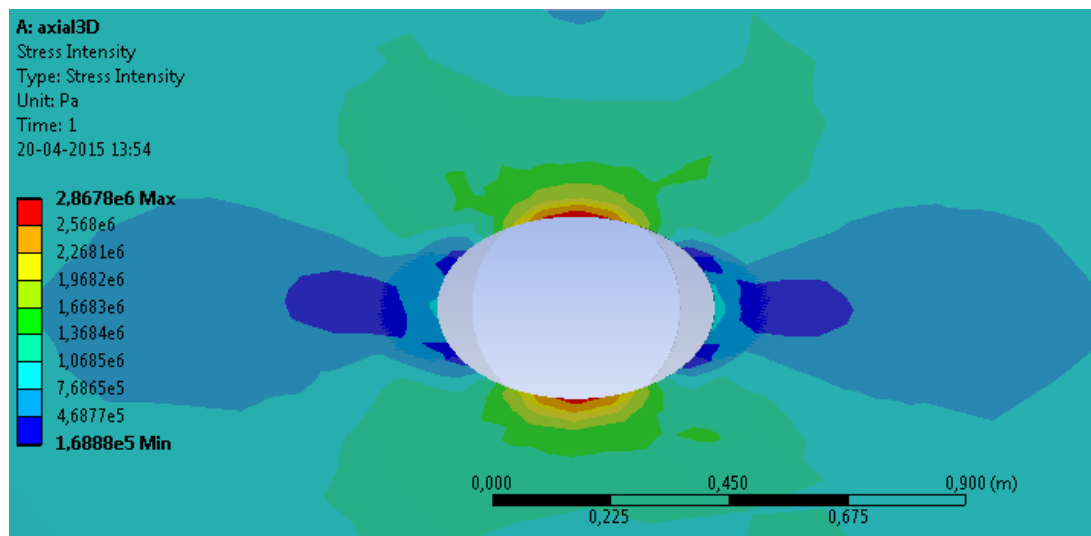


Figura 27 - Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Máxima tensão principal:

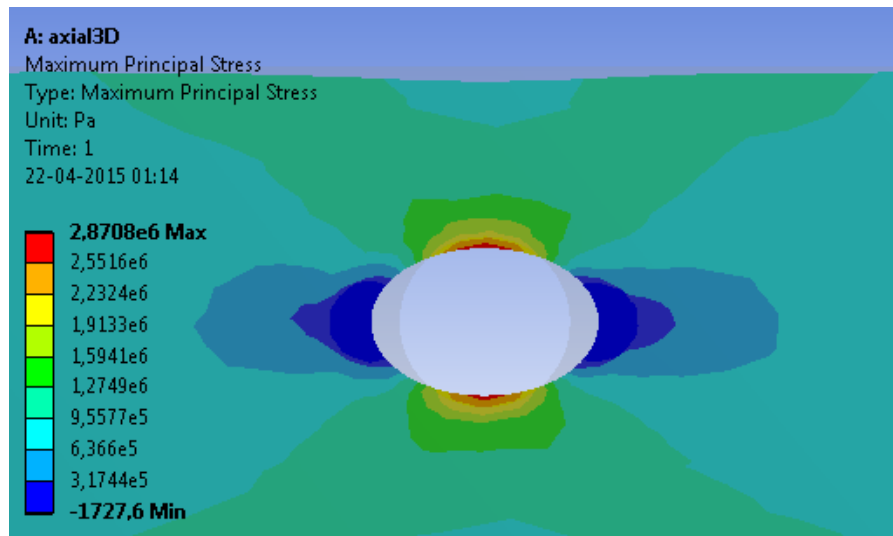


Figura 28 - Distribuição da máxima tensão principal (Pa)



## Apêndice 3 - Exercício Tipo 2 em ANSYS 3D

Neste apêndice irá ser descrito todo o processamento de elaboração do exercício teórico em estudo efetuado no ANSYS desde a definição dos elementos até a apresentação dos resultados.

Definição do sistema de análise:

- *Analysis Systems/ Static Structural/ ok*

Definir material:

- *Engineering Data/ Structural Steel/ Return to project*

Modelação da placa:

- *Geometry/ Abrir DesignModeler(DM)*
- Elaborar *sketch* no plano XY
- Executar um *extrude* de 0,01m
- Fechar DM

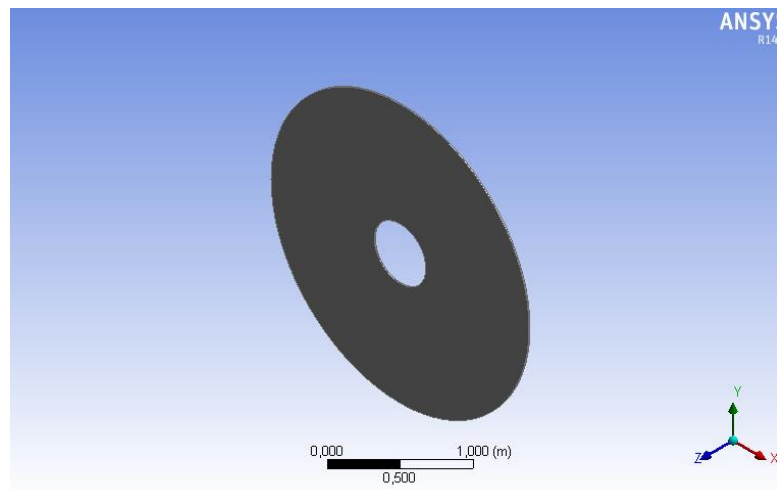


Figura 29- Placa modelada em 3D



Execução da malha:

- *Model/ Abrir "Mechanical"*
- *Mesh/Sizing*
  - *Relevance Center: Medium*
  - *Smoothing: Medium*
  - *Transition: Slow*
  - *Span Angle Center: Medium*

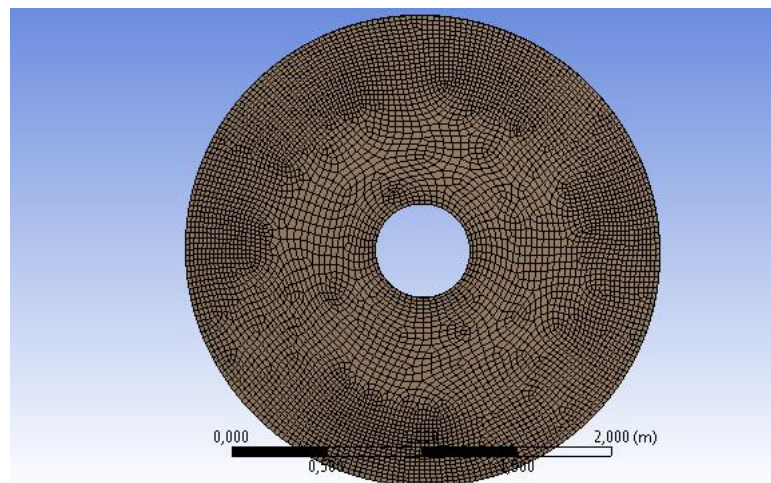


Figura 30- Malha 3D da placa

Definição da Pressão aplicada nas faces da placa:

- *Static Structural/ Loads/ Pressure*
  - *Geometry:* Selecionar Face superior
  - *Magnitude:* 50000 Pa

Definição das condições de fronteira (encastrado):

- *Static Structural/ Supports/ Displacement*
  - *X Component:* 0
  - *Y Component:* 0
  - *Z Component:* 0

Encontrar solução para as diferentes análises de tensões:

- Selecionar tipo de critérios que se pretende analisar:

- *Solution/ Stress/*

- *Equivalent Stress*
    - *Maximum principal stress*
    - *Stress Intensity*

- Apresentar valores máximos

- Em cada tipo de critérios escolhido clicar botão



- *Solve*

Apresentação dos resultados obtidos:

- Tensão equivalente (Von Mises):

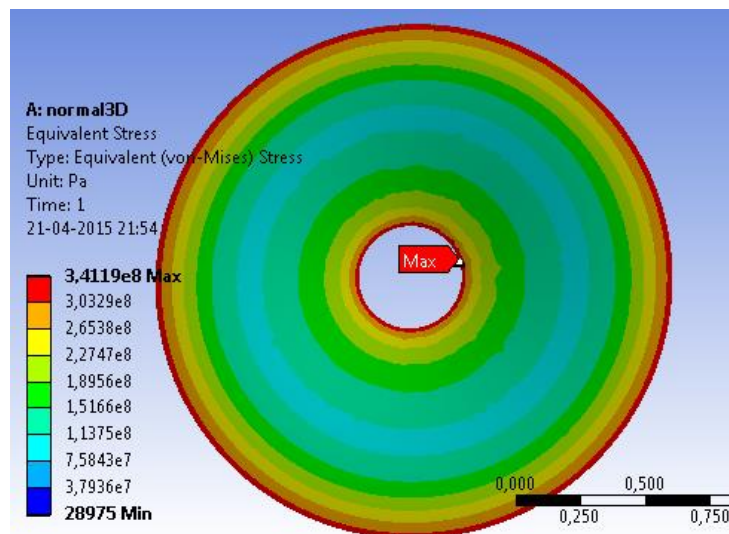


Figura 31- Tensão de Von Mises (Pa)

- Intensidade de Tensão:

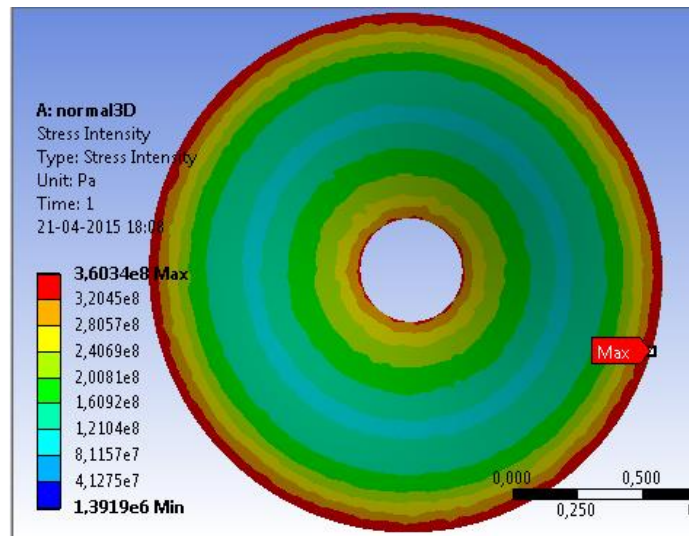


Figura 32 - Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Máxima tensão principal:

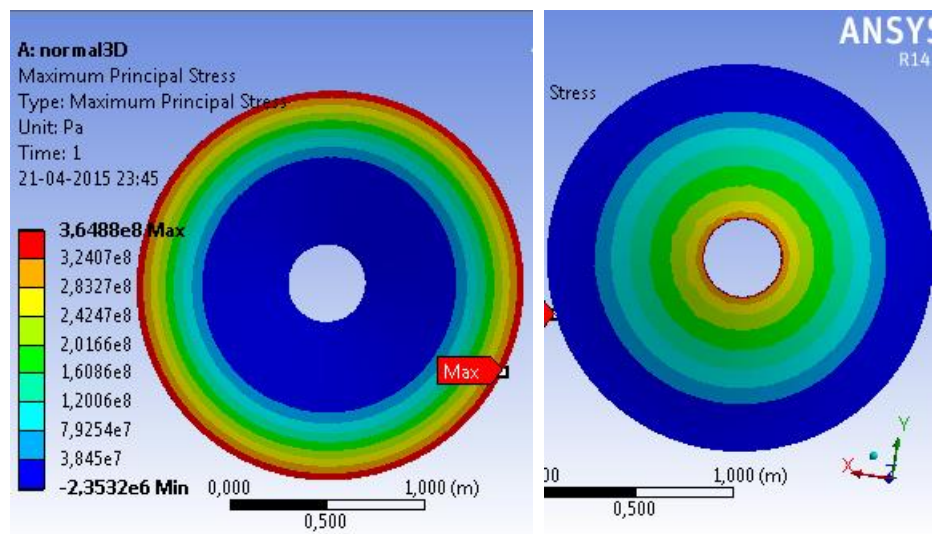


Figura 33 - Distribuição da máxima tensão principal, face superior (esquerda) e face inferior (direita) (Pa)

Visto existir discrepâncias no que toca à localização do valor máximo da concentração de tensões foi determinado o valor da tensão máxima ao longo do limite externo e ao longo do furo nos 3 casos. Para tal foi necessário definir o seguinte no ANSYS:

- *Solution/ Probe/ Stress*
  - *Geometry:*
    - Von Mises: selecionar a face externa da placa
    - Outras duas: selecionar a face interna do furo
  - *Result Seletion:* selecionar o critério a analisar (Von Mises,....)
- *Solve*

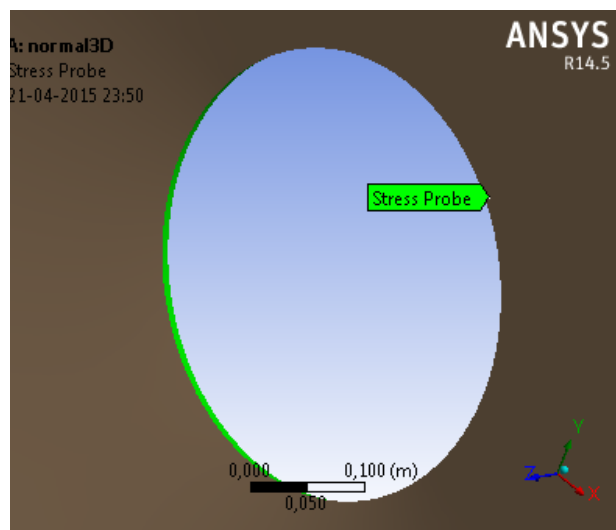


Figura 34- Exemplo da aplicação do Probe

Após correr a solução obteve-se os seguintes resultados:

- Tensão Von Mises
  - Limite externo:  $0.323 \times 10^9$  Pa
- Intensidade de Tensão
  - Furo:  $0.344 \times 10^9$  Pa
- Máxima tensão principal:
  - Furo:  $0.342 \times 10^9$  Pa

Critério de análise	Zona de análise	
	Exterior	Furo
Von Mises	0,323	0,341
Intensidade de tensão	0,36	0,344
Máxima tensão principal	0,365	0,342

Tabela 10- Relação dos valores máximos de tensão ( $10^9$  Pa)

Após análise dos resultados concluiu-se que a tensão máxima neste tipo de exercício está localizada ao longo do limite exterior da placa mas que a concentração de tensões em volta do furo é bastante significativa e não deve ser ignorada.

## Apêndice 4 - Exercício Tipo 1 com Reforços em ANSYS 3D

Neste apêndice é descrito todo o processamento de elaboração do exercício teórico em estudo efetuado no ANSYS desde a definição dos elementos até a apresentação dos resultados. Visto ter-se como base o exercício já executado e descrito no apêndice 2, apenas é apresentado as alterações executadas na modelação da placa, com apresentação dos cálculos e a apresentação dos resultados da distribuição de tensões de Von Mises e de intensidade.

Cálculo para encontrar dimensões sabendo:

- Espessura mínima: 0,01 m

$$A = (h - t) * T \leftrightarrow h_{max} = \frac{7,548 + 1}{1} = 0,0854 \text{ m} \quad (23)$$

- Profundidade mínima: 0,029 m

$$A = (h - t) * T \leftrightarrow T_{max} = \frac{7,548}{2,9} = 0,0397 \text{ m} \quad (24)$$

- Espessura média:  $(T_{min} + T_{max})/2 = 0,0249 \text{ m}$

$$A = (h - t) * T \leftrightarrow h = \frac{7,548}{2,4865} + 1 = 0,0404 \text{ m} \quad (25)$$

- Profundidade média:  $(h_{min} + h_{max})/2 = 5,724 \text{ cm}$

$$A = (h - t) * T \leftrightarrow T = \frac{7,548}{5,724} = 0,0160 \text{ m} \quad (26)$$

Modelação da placa com a espessura mínima:

- Elaborar novo *sketch* na face superior e desenhar o anel com diâmetro de:

$$D = D_{int} + (T * 2) = 40 + (1 * 2) = 0,42 \text{ m} \quad (27)$$

- Executar um *extrude* duplo:
  - *Direction = Both-Asymmetric*
  - $FD1 = \frac{h-t}{2} = \frac{8,548-1}{2} = 0,0377 \text{ m}$
  - $FD2 = FD1 + t = 0,0477 \text{ m}$
- Fechar DM

A modelação das restantes 3 placas foram análogas à descrita em cima apenas foi alterado os valores da espessura e profundidade que consequentemente alteraram os valores do diâmetro externo e dos *extrude*.

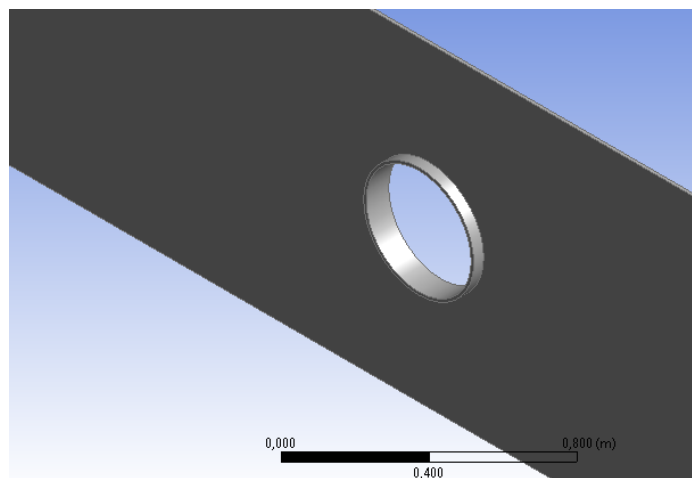


Figura 35- Pormenor do anel de reforço de uma das placas

A malha criada bem como a análise efetuada foram executadas da mesma forma que no exercício sem reforço.

Os resultados da distribuição de tensões nas placas com reforço foram os seguintes:

Placa com reforço de espessura mínima:

- Tensão equivalente (Von Mises):

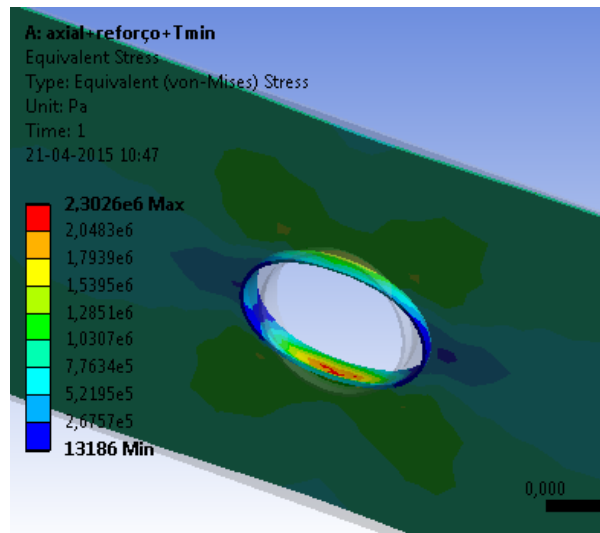


Figura 36 - Tensão de Von Mises (Pa)

- Intensidade de Tensão:

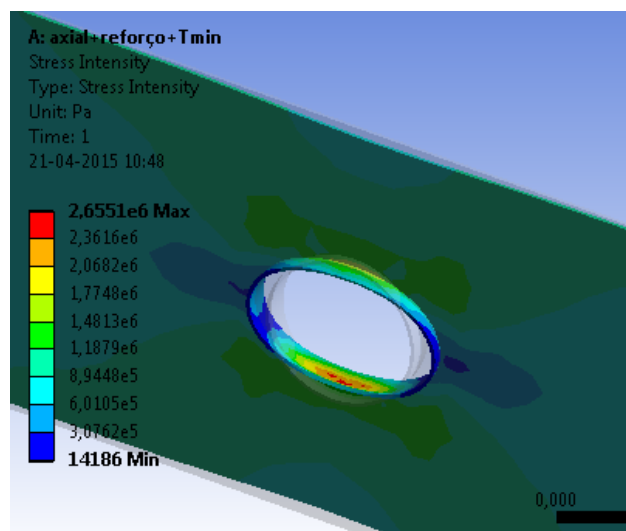


Figura 37 - Distribuição da intensidade de tensão (Pa)



- Máxima tensão principal:

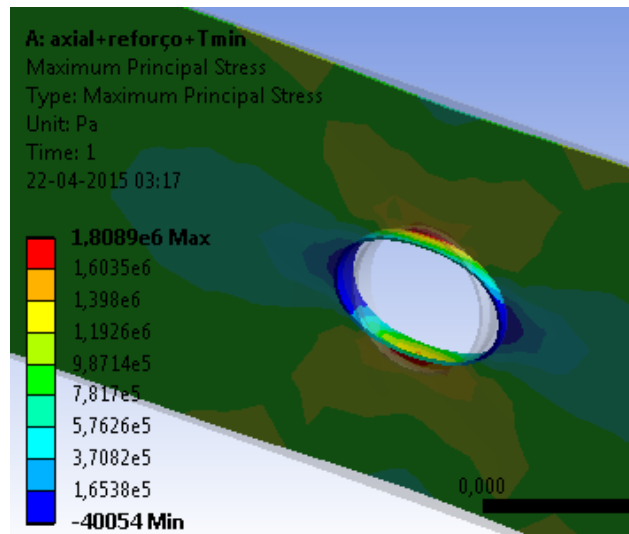


Figura 38- Distribuição da Máxima tensão principal (Pa)

Placa com reforço de profundidade mínima:

- Tensão equivalente (Von Mises):

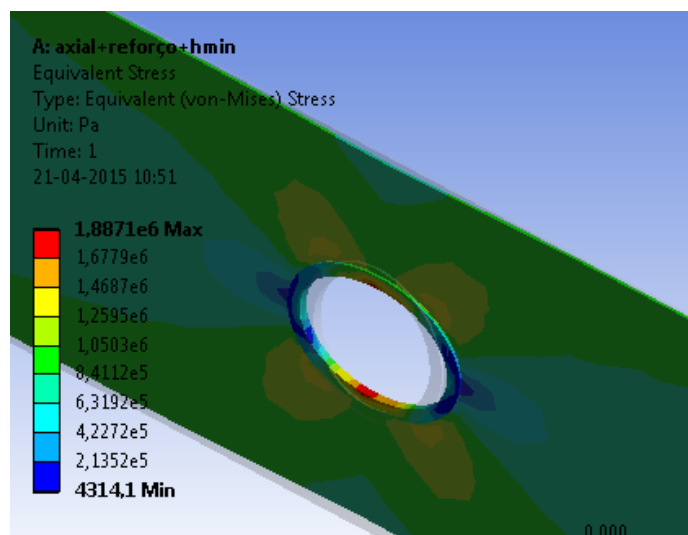


Figura 39 - Tensão de Von Mises (Pa)

- Intensidade de Tensão:

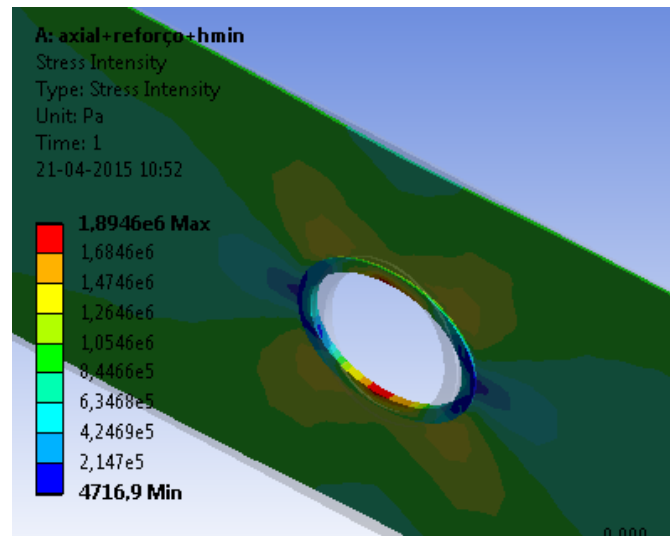


Figura 40 - Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

Máxima tensão principal:

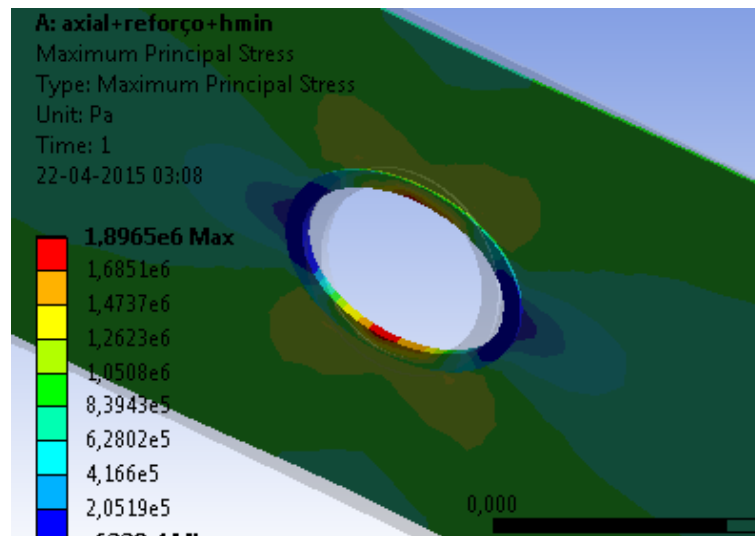


Figura 41- Distribuição da Máxima tensão principal (Pa)

Placa com reforço de espessura média:

- Tensão equivalente (Von Mises):

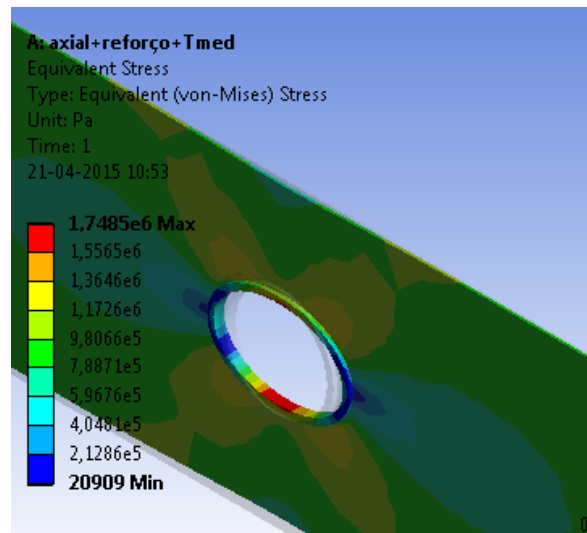


Figura 42 - Tensão de Von Mises (Pa)

Intensidade de Tensão:

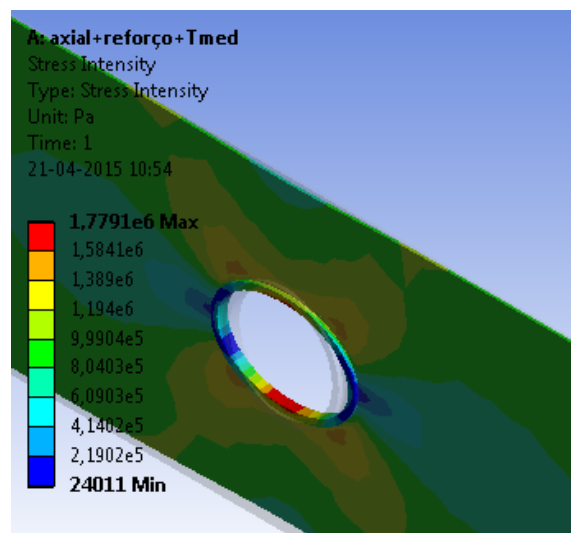


Figura 43 - Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Máxima tensão principal:

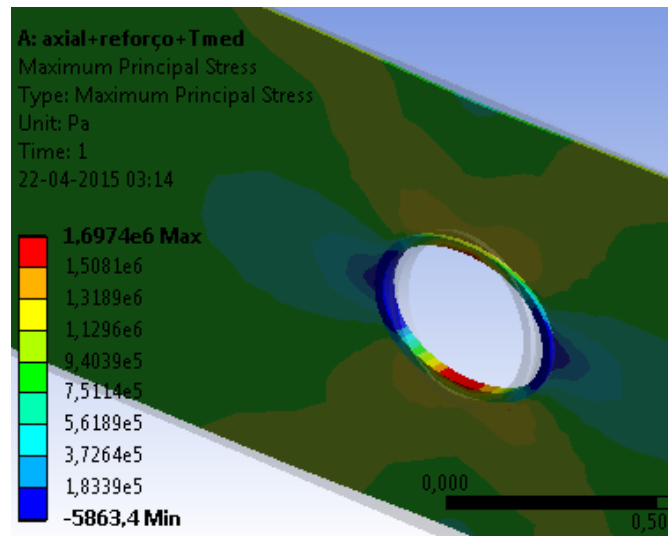


Figura 44- Distribuição da Máxima tensão principal (Pa)

Placa com reforço de profundidade média:

- Tensão equivalente (Von Mises):

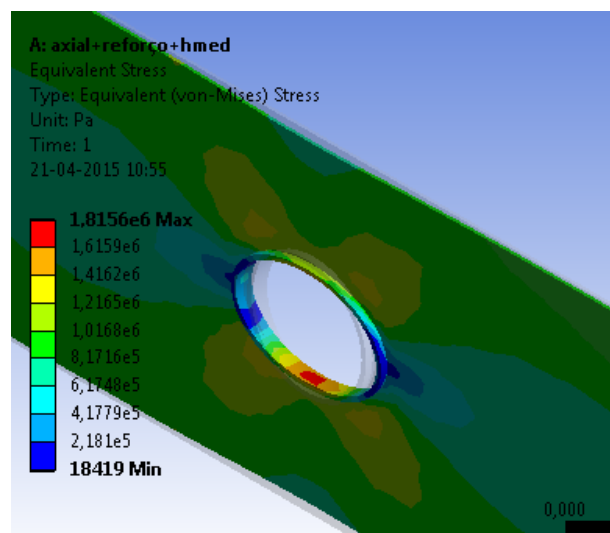


Figura 45 - Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Intensidade de Tensão:

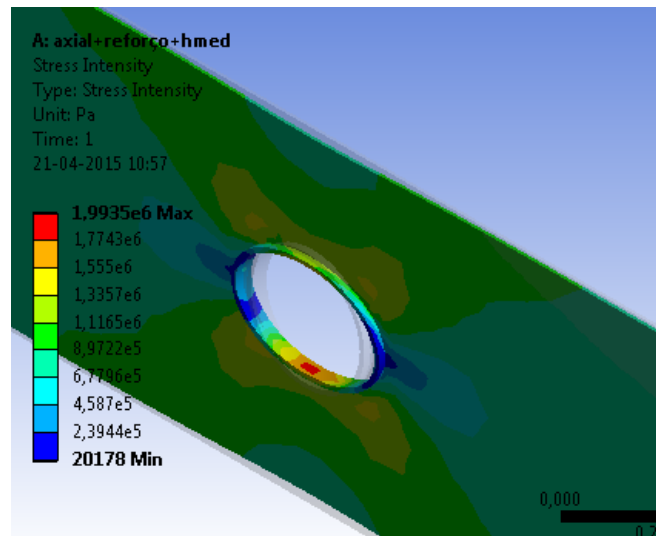


Figura 46 - Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Máxima tensão principal:

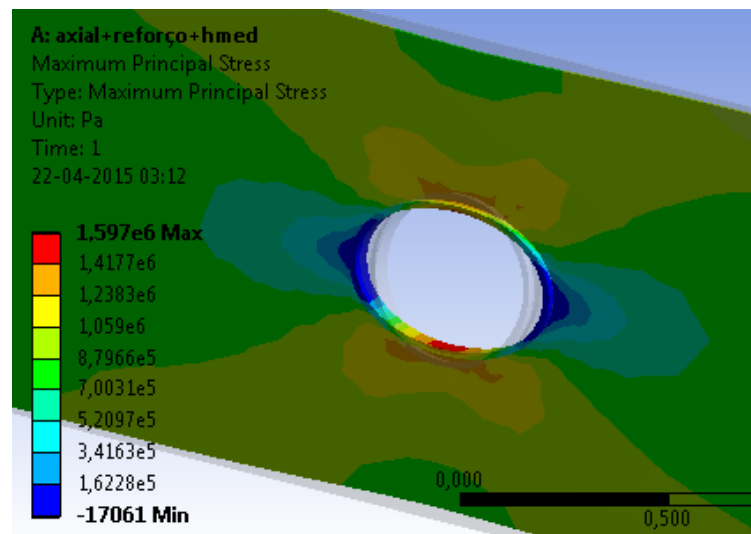


Figura 47- Distribuição da Máxima tensão principal (Pa)

## Apêndice 5 - Exercício Tipo 2 com Reforços em ANSYS 3D

Neste apêndice é descrito todo o processamento de elaboração do exercício teórico em estudo efetuado no ANSYS desde a definição dos elementos até a apresentação dos resultados. Visto ter-se como base o exercício já executado e descrito no apêndice 3, apenas é apresentado as alterações executadas na modelação da placa, com apresentação dos cálculos e a apresentação dos resultados da distribuição de tensões de Von Mises e de intensidade.

Devido ao facto que se ter mantido o mesmo diâmetro de furo e a mesma espessura de placa que no exercício tipo 1, podemos usar as mesmas dimensões dos reforços utilizados no apêndice 4:

- Espessura mínima: 0,01 m

$$h_{max} = 0,0854 \text{ m}$$

- Profundidade mínima: 0,029 m

$$T_{max} = 0,0397 \text{ m}$$

- Espessura média: 0,025 m

$$h = 0,0404 \text{ m}$$

- Profundidade média: 0,057m

$$T = 0,0160 \text{ m}$$

A modelação dos reforços na placa circular foi executado exatamente da mesma forma que no exercício anterior, ou seja, o processo já está descrito e está no apêndice anterior.

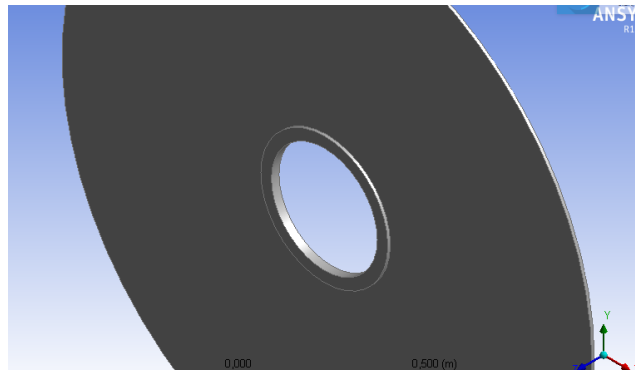


Figura 48- Pormenor do anel de reforço de uma das placas

Os resultados da distribuição de tensões nas placas com reforço foram os seguintes:

Para a placa com reforço de espessura mínima, a distribuição de tensões, e a localização da tensão máxima são as seguintes:

- Tensão equivalente (Von Mises):

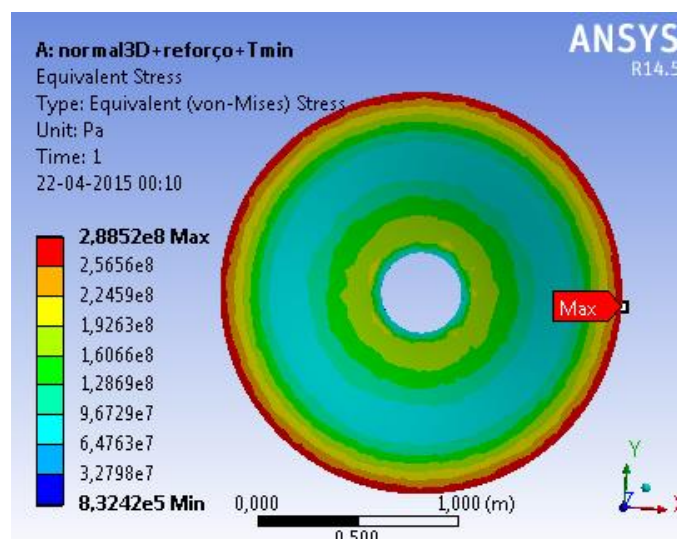


Figura 49- Tensão de Von Mises (Pa)

- Intensidade de Tensão:

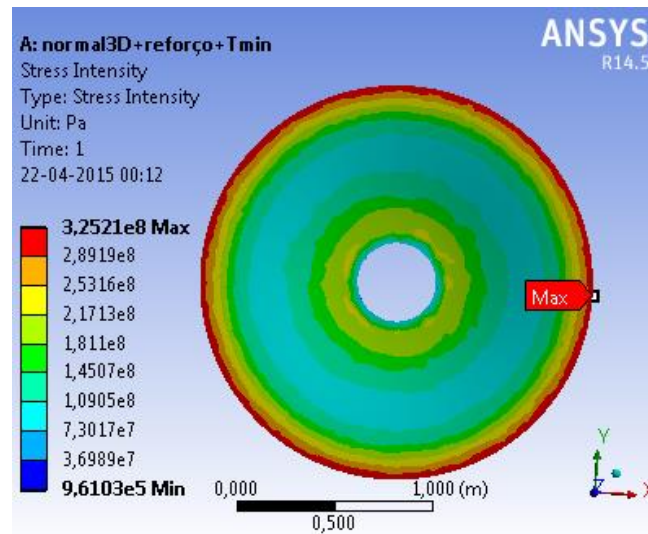


Figura 50- Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Máxima tensão principal:

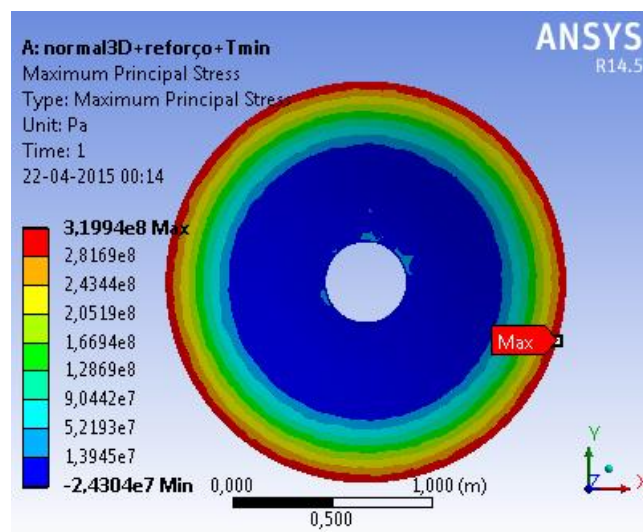


Figura 51- Distribuição da máxima tensão principal, face superior (Pa)



Placa com reforço de profundidade mínima:

- Tensão equivalente (Von Mises):

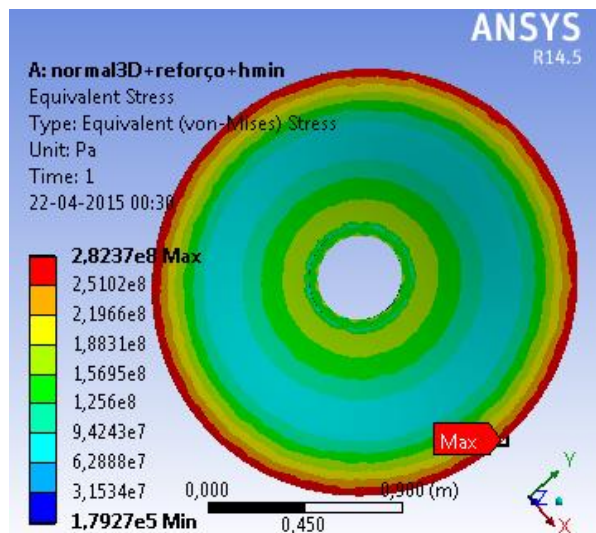


Figura 52- Tensão de Von Mises (Pa)

- Intensidade de Tensão:

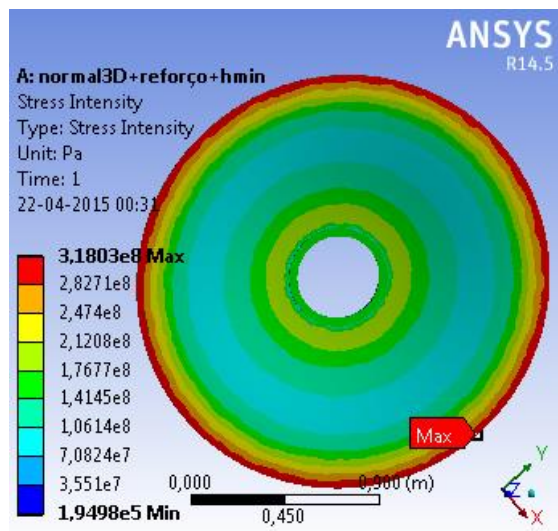


Figura 53- Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Máxima tensão principal:

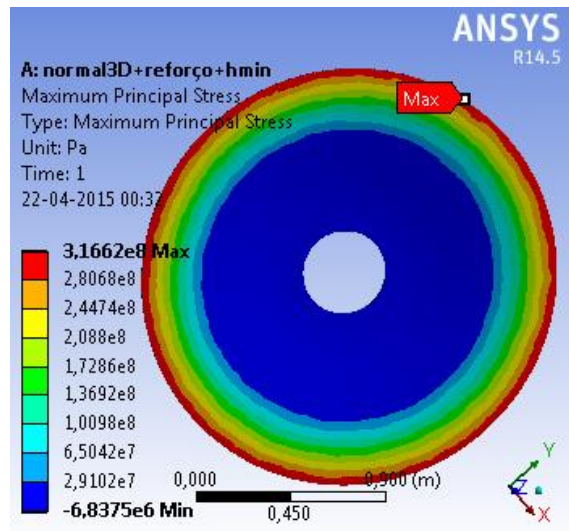


Figura 54- Distribuição da máxima tensão principal, face superior (Pa)

Placa com reforço de espessura média:

- Tensão equivalente (Von Mises):

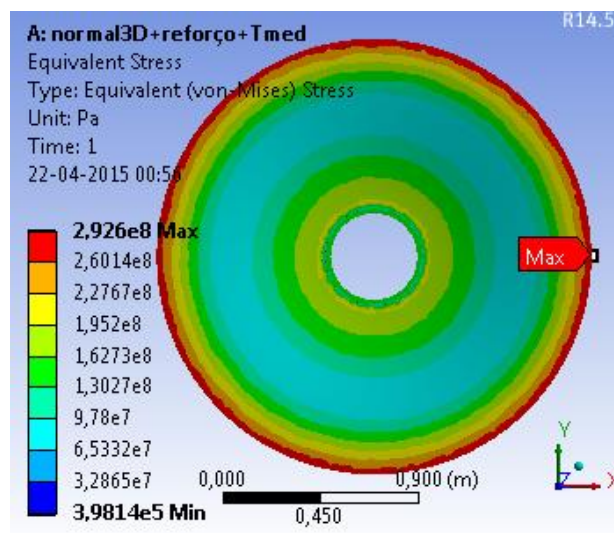


Figura 55- Tensão de Von Mises (Pa)

- Intensidade de Tensão:

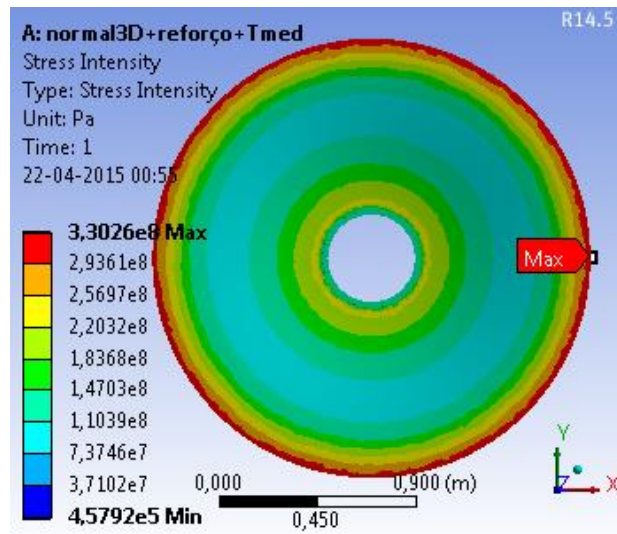


Figura 56- Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Máxima tensão principal:

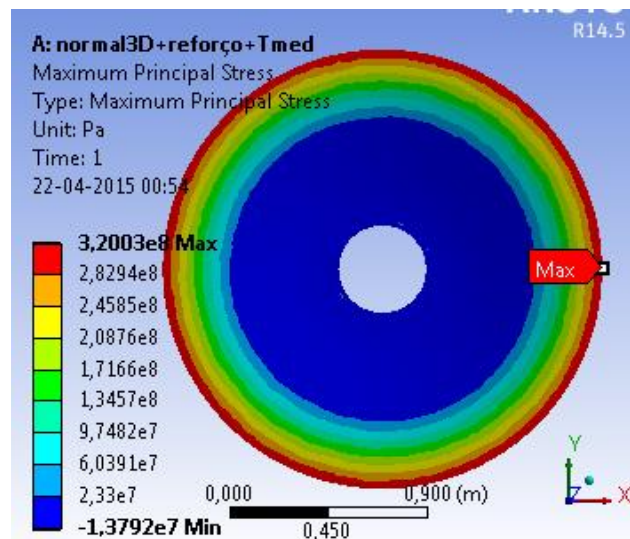


Figura 57- Distribuição da máxima tensão principal, face superior (Pa)

Placa com reforço de profundidade média:

- Tensão equivalente (Von Mises):

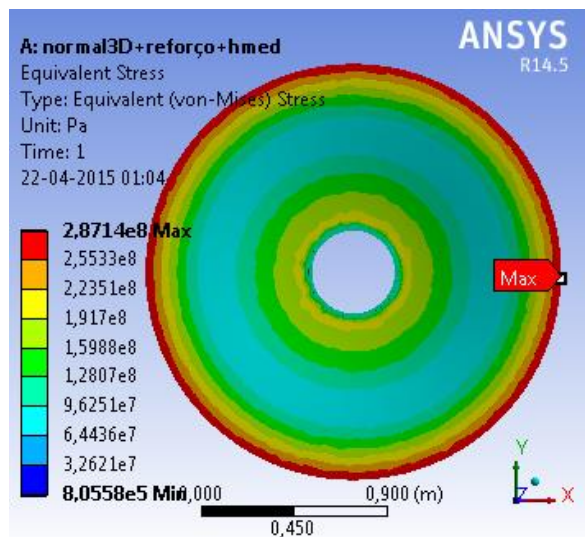


Figura 58- Tensão de Von Mises (Pa)

- Intensidade de Tensão:

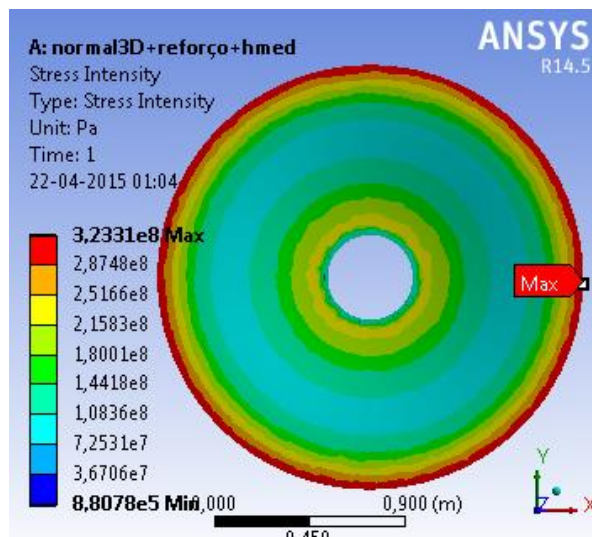


Figura 59- Distribuição da intensidade de tensão (Pa)

- Máxima tensão principal:

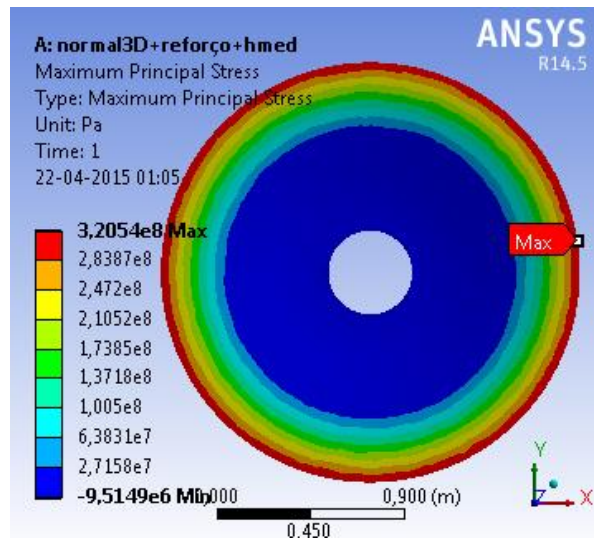


Figura 60- Distribuição da máxima tensão principal, face superior (Pa)

Determinação do valor máximo da concentração de tensões ao longo da interface entre a placa e o reforço mediante a dimensão do reforço:

- Espessura mínima:
  - Tensão de Von Mises:  $0,126 \times 10^9$  Pa
  - Intensidade de tensão:  $0,145 \times 10^9$  Pa
  - Máxima tensão principal:  $0,146 \times 10^9$  Pa
- Profundidade mínima:
  - Tensão de Von Mises:  $0,167 \times 10^9$  Pa
  - Intensidade de tensão:  $0,172 \times 10^9$  Pa
  - Máxima tensão principal:  $0,167 \times 10^9$  Pa
- Espessura média:
  - Tensão de Von Mises:  $0,146 \times 10^9$  Pa
  - Intensidade de tensão:  $0,166 \times 10^9$  Pa
  - Máxima tensão principal:  $0,172 \times 10^9$  Pa
- Profundidade média:
  - Tensão de Von Mises:  $0,143 \times 10^9$  Pa
  - Intensidade de tensão:  $0,165 \times 10^9$  Pa
  - Máxima tensão principal:  $0,145 \times 10^9$  Pa





## Apêndice 6 – Determinação da complexidade da malha

Considerando uma placa com 2m de comprimento e 1m de largura foi feito 3 análises. Uma primeira em que cada oitavo do furo é dividido em 5 partes, outra com 9 divisões e por fim uma última com 13 divisões.

Para as conclusões apresentadas foi tipo em conta o diferencial de valores, a distribuição de deslocamentos ao longo da placa e o tempo necessário para finalizar cada análise. Os deslocamentos apresentados nas figuras seguintes encontram-se em metros.

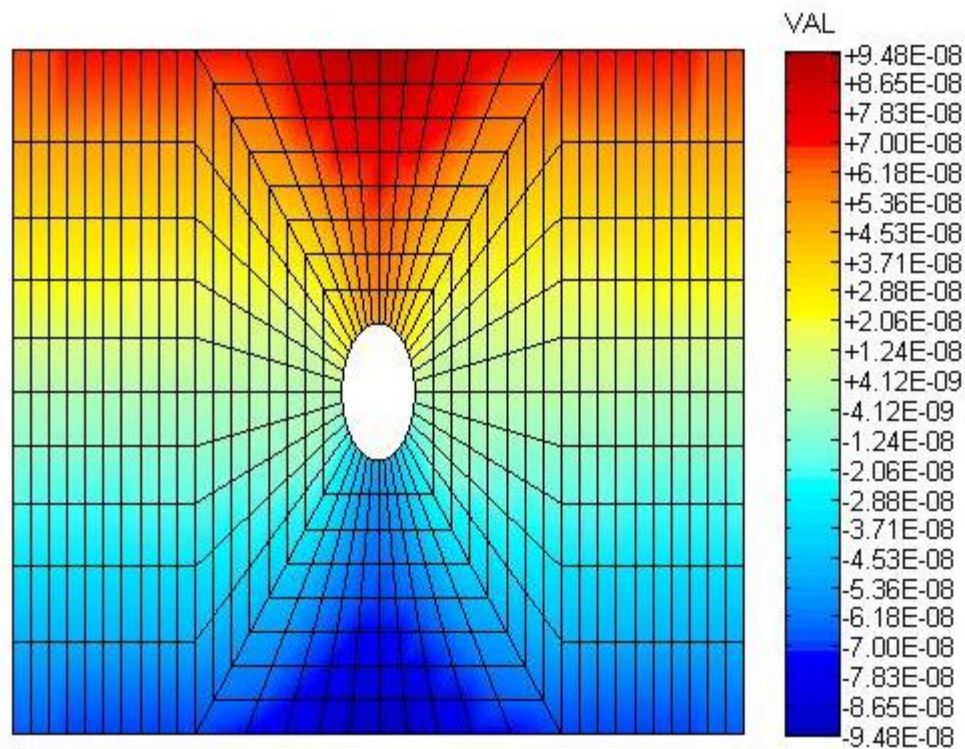


Figura 61 – Análise com 5 divisões por oitavo (40 divisões)



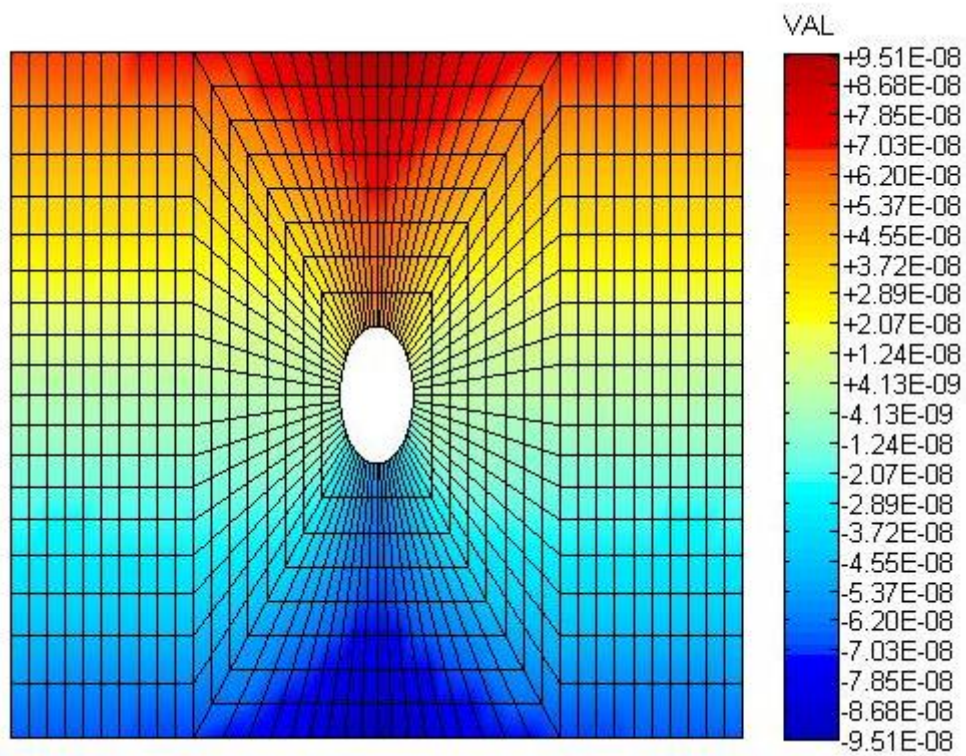


Figura 62 – Análise com 9 divisões por oitavo (72 divisões)

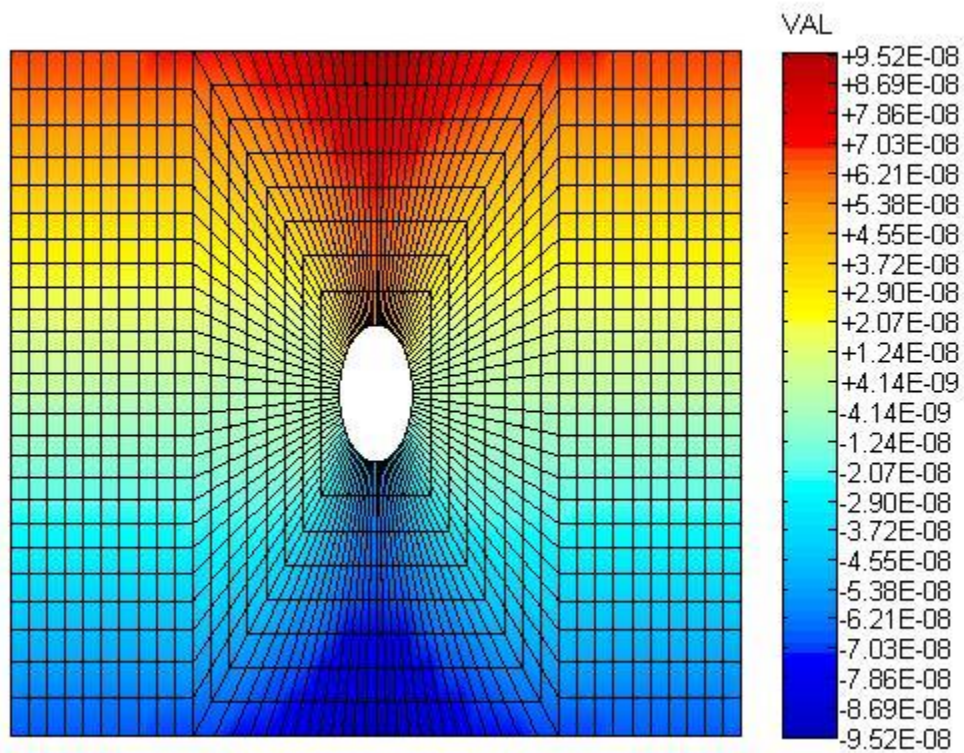


Figura 63 – Análise com 13 divisões por oitavo (104 divisões)

Como é possível verificar nas figuras anteriores existe uma grande evolução na análise do 1º caso para o 2º mas esta pouco varia quando se aumenta as divisões para 13.

Relativamente aos tempos de execução, os tempos, em segundos, verificados foram:

Nº Divisões por oitavo	Criar Malha	Deslocamento em X	Deslocamento em Y	Total
5	11	2	3	16
9	17	3	4	24
13	90	14	5	109

Tabela 11 – Tempos de execução em segundos

No que diz respeito à distribuição dos deslocamentos ao longo da placa, não foi verificado uma evolução significativa com o aumento do número de divisões.

Com os resultados obtidos em cima, e fazendo o cruzamento dos 3 critérios, concluiu-se que a melhor opção de análise é aquela que divide o furo em 72 partes uma vez que, relativamente à relação tempo de processamento/valores obtidos foi claramente o melhor, distanciando-se em apenas 0.1% do melhor intervalo de valores (contra os 0,4% do mais distante) e apenas 8s do mais rápido (contra os 93s do mais lento).



## Apêndice 7 – Exercício Placa com furo ao centro em MATLAB

### Exercício em MATLAB

Após introduzir os dados acima descritos obteve-se os seguintes resultados a distribuição dos vetores deslocamento nodais:

- Valor máximo =  $5,00\text{e-}05$  m
- Valor mínimo =  $4,85\text{e-}06$  m

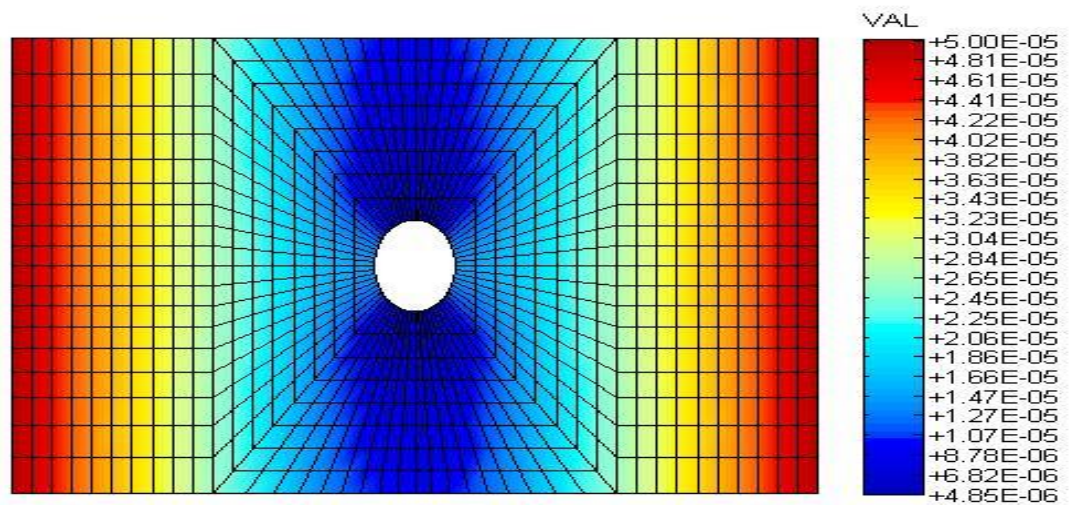


Figura 64 – Distribuição dos vetores deslocamento (m) nodais em MATLAB

Após o término da análise a tensão máxima e a sua localização determinadas pelo programa estão representadas na figura 64.

```
Tensão Máxima:  
2.624721e+07  
Coordenadas do nó 1:  
0.987 ; 0.350  
>>
```

Figura 65 – Resultados finais apresentados na "Command Window" para o caso da placa com furo central (tensão em Pa).

## Exercício em ANSYS

Após introduzir os dados e moldar o problema em ANSYS obteve-se os seguintes resultados para os vetores deslocamento nodais:

- Valor máximo =  $5,00\text{e-}05$  m
- Valor mínimo =  $4,97\text{e-}6$  m

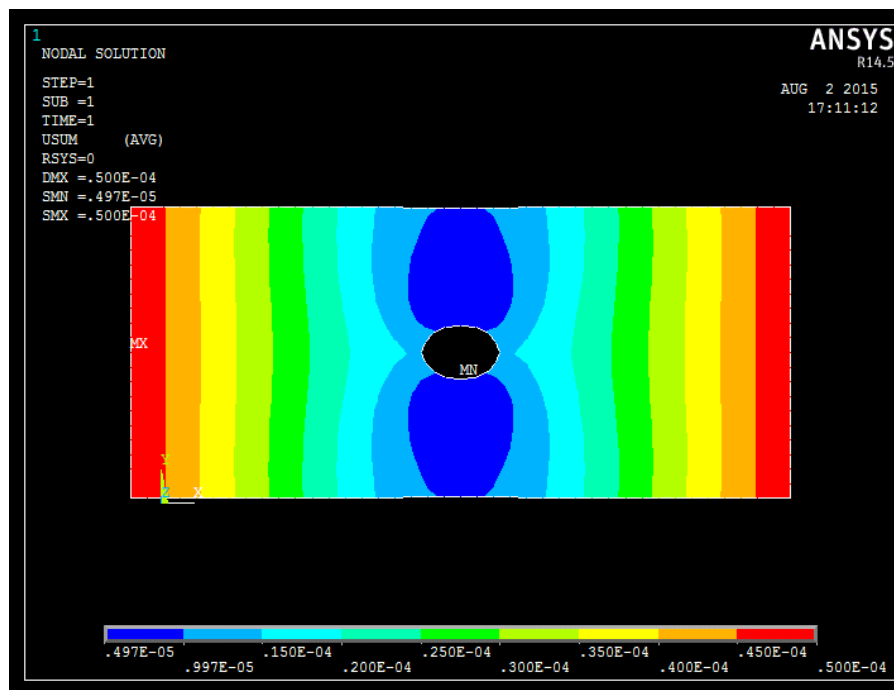


Figura 66 - Distribuição dos vetores deslocamento (m) nodais em ANSYS

Os valores máximos da tensão na componente X registados pelo ANSYS estão representados na figura 67 que representa um excerto da listagem das tensões sentidas por todos os nós.

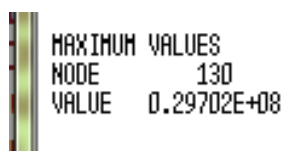


Figura 67 – Valor máximo da tensão (Pa) sentida pela placa na componente X



## Apêndice 8 – Exercício Placa com furo no lado esquerdo em MATLAB

### Exercício em MATLAB

Após introduzir os dados acima descritos obteve-se os seguintes resultados a distribuição dos vetores deslocamento nodais:

- Valor máximo =  $5,38\text{e-}05$  m
- Valor mínimo =  $2,46\text{e-}07$  m

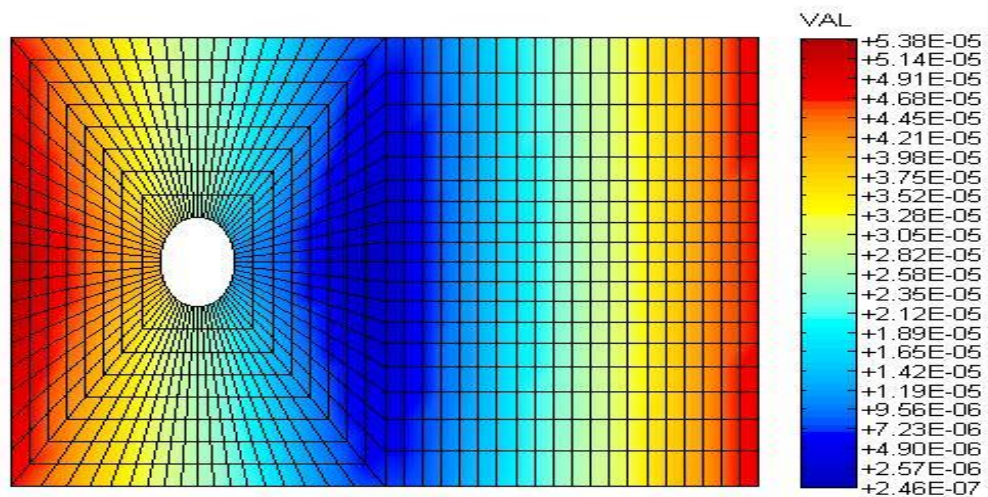


Figura 68 – Distribuição dos vetores deslocamento (m) nodais em MATLAB

Após o término da análise a tensão máxima e a sua localização determinadas pelo programa estão representadas na figura 68.

```
Tensão Máxima:  
2.701826e+07  
Coordenadas do nó 1:  
0.487 ; 0.350  
>>
```

Figura 69 – Resultados finais apresentados na "Command Window" para o caso da placa com furo no lado esquerdo (tensão em Pa).

## Exercício em ANSYS

Após introduzir os dados e moldar o problema em ANSYS obteve-se os seguintes resultados para os vetores deslocamento nodais:

- Valor máximo =  $5,38\text{e-}05$  m
- Valor mínimo =  $2,85\text{e-}7$  m

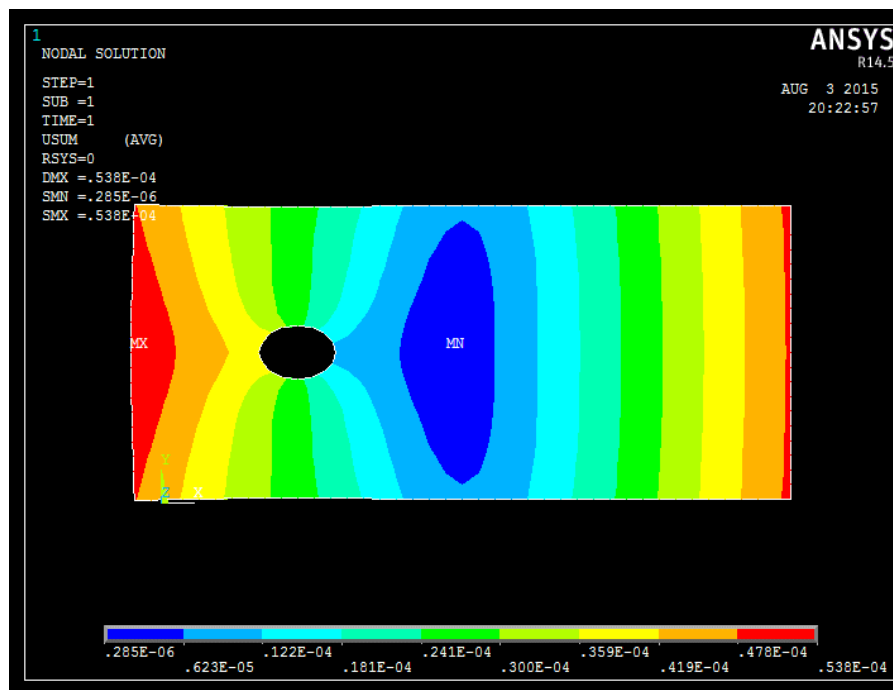


Figura 70 - Distribuição dos vetores deslocamento (m) nodais em ANSYS

Os valores máximos da tensão na componente X registados pelo ANSYS estão representados na figura 70 que representa um excerto da listagem das tensões sentidas por todos os nós.

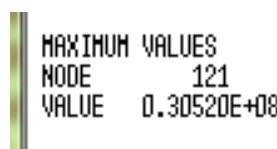


Figura 71 - Valor máximo da tensão (Pa) sentida pela placa na componente X

## Apêndice 9 – Exercício Placa com furo no topo em MATLAB

### Exercício em MATLAB

Após introduzir os dados acima descritos obteve-se os seguintes resultados a distribuição dos vetores deslocamento nodais:

- Valor máximo =  $5,30\text{e-}05$  m
- Valor mínimo =  $5,26\text{e-}06$  m

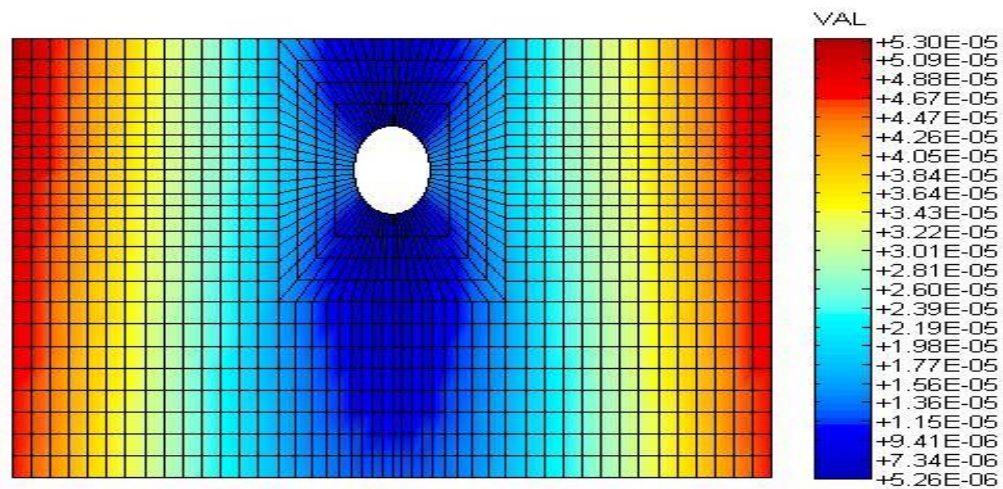


Figura 72 – Distribuição dos vetores deslocamento (m) nodais em MATLAB

Após o término da análise a tensão máxima e a sua localização determinadas pelo programa estão representadas na figura 72.

```
Tensão Máxima:  
2.686465e+07  
Coordenadas do nó 1:  
0.987 ; 0.550  
>>
```

Figura 73 – Resultados finais apresentados na "Command Window" para o caso da placa com furo no topo (tensão em Pa)



## Exercício em ANSYS

Após introduzir os dados e moldar o problema em ANSYS obteve-se os seguintes resultados para os vetores deslocamento nodais:

- Valor máximo =  $5,30\text{e-}05$  m
- Valor mínimo =  $5,29\text{e-}6$  m

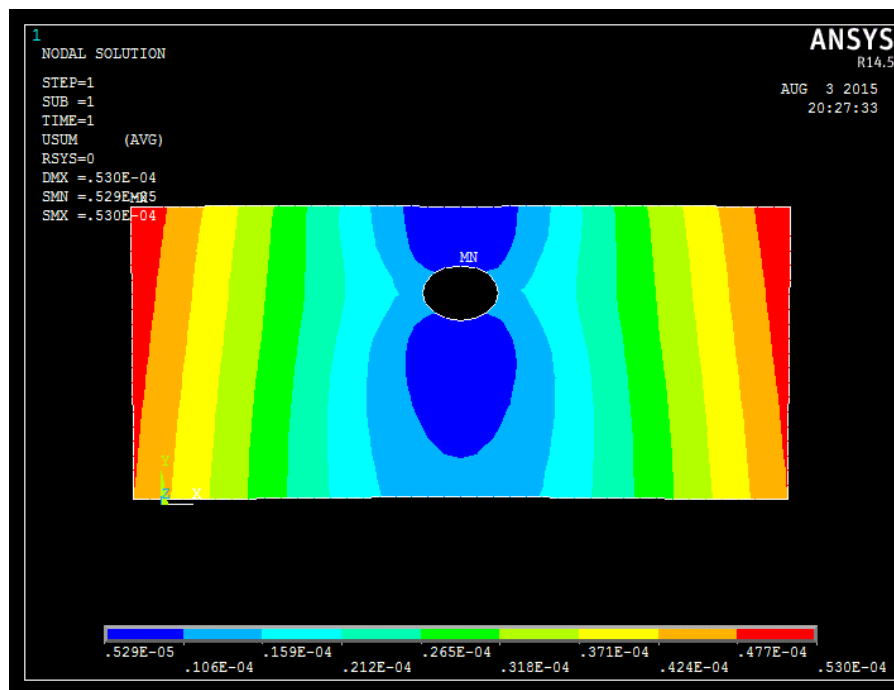


Figura 74 - Distribuição dos vetores deslocamento (m) nodais em ANSYS

Os valores máximos da tensão na componente X registados pelo ANSYS estão representados na figura 74 que representa um excerto da listagem das tensões sentidas por todos os nós.

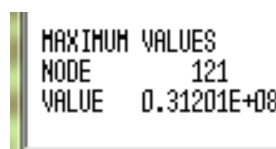


Figura 75 - Valor máximo da tensão (Pa) sentida pela placa na componente X

## Apêndice 10 – Exercício Placa com furo no canto inferior direito em MATLAB

### Exercício em MATLAB

Após introduzir os dados acima descritos obteve-se os seguintes resultados a distribuição dos vetores deslocamento nodais:

- Valor máximo =  $5,49\text{e-}05$  m
- Valor mínimo =  $8,26\text{e-}07$  m

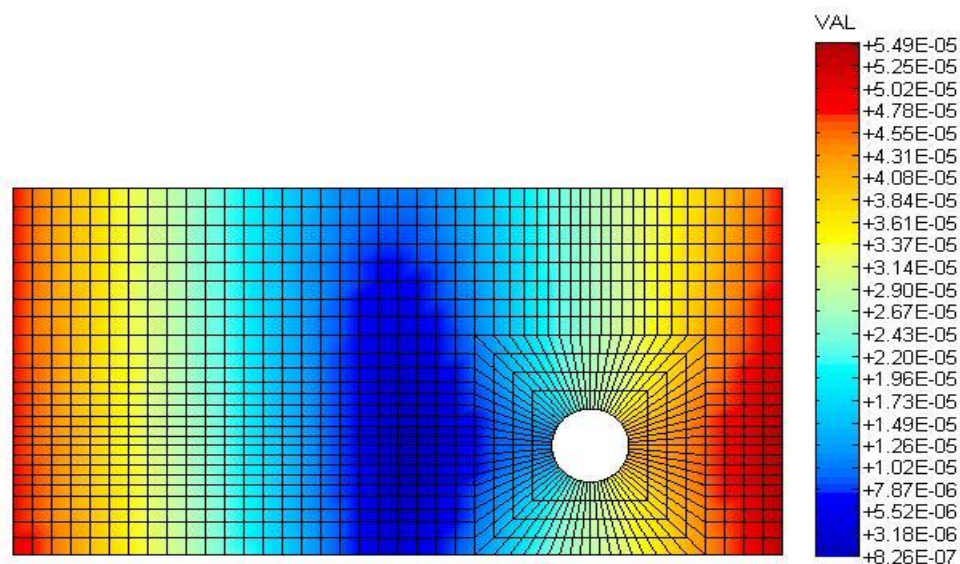


Figura 76 – Distribuição dos vetores deslocamento (m) nodais em MATLAB

Após o término da análise a tensão máxima e a sua localização determinadas pelo programa estão representadas na figura 76.

```
Tensão Máxima:  
2.793216e+07  
Coordenadas do nó 1:  
1.487 ; 0.150  
>>
```

Figura 77 – Resultados finais apresentados na "Command Window" para o caso da placa com furo central (tensão em Pa).

## Exercício em ANSYS

Após introduzir os dados e moldar o problema em ANSYS obteve-se os seguintes resultados para os vetores deslocamento nodais:

- Valor máximo =  $5,48\text{e-}05$  m
- Valor mínimo =  $9,08\text{e-}7$  m

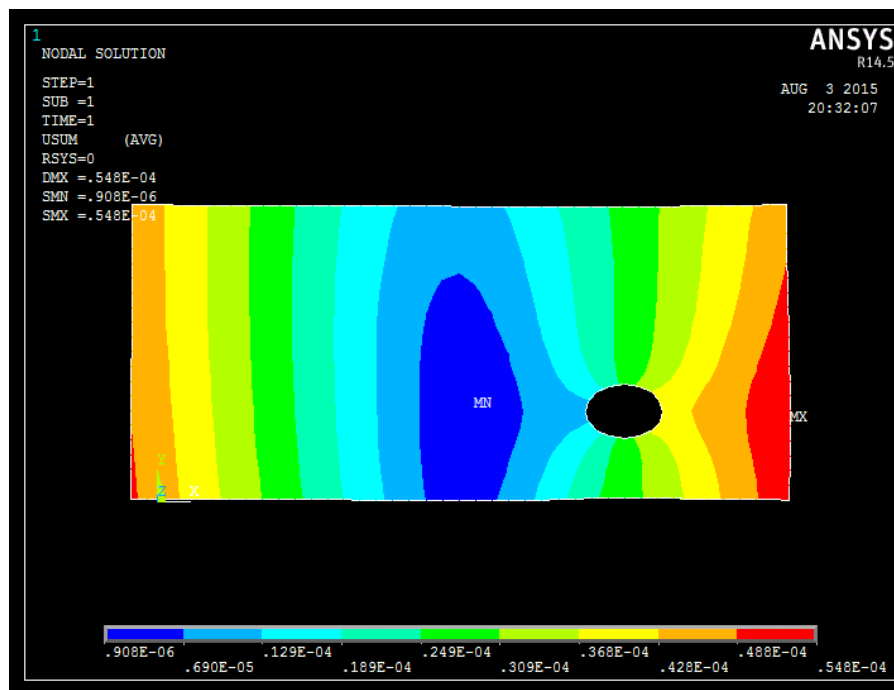


Figura 78 - Distribuição dos vetores deslocamento (m) nodais em ANSYS

Os valores máximos da tensão na componente X registados pelo ANSYS estão representados na figura 79 que representa um excerto da listagem das tensões sentidas por todos os nós.

```
MAXIMUM VALUES  
NODE      130  
VALUE     0.31231E+08
```

Figura 79 - Valor máximo da tensão (Pa) sentida pela placa na componente X

## Apêndice 11 – Código MatLab

### Main.m

```

1 - clc %limpar janela de comando
2 - clear all %limpar variáveis ja
  existentes
3 -
4 - %dimensões da placa
5 - comprimento=2; %metros
6 - largura=1; %metros
7 - t=0.01; %espessura(metros)
8 - xe=0.05; %tamanho dos elementos
  caso estejam livres de
  influências
9 - r=0.1; %raio do furo
10 - % Propriedades fisicas da
    placa
11 -     E=2.1e11; %Pa
12 -     u=0.3; %poisson
13 -     %erro de contas
14 -     erro=0.00000001;
15 -     %coordenadas iniciais
16 -     Xi=xe*2+r;ix=1;
17 -     Yi=xe*2+r;iy=0;
18 -
19 -     %variáveis que controlam
    iterações da otimização
20 -     stop=0;stop1=0;stop2=0;
21 -     comuta=1;
22 -     maxF=1e100;%valor inicial
    de elevado valor
23 -
24 -
25 -     play=0;
26 -     while stop<1; %inicio da
    otimização
27 -
28 -     %limpar as variáveis que
    contém informação da análise
    anterior
29 -     clear
    ('forca','glfixos','tensaoE','ten
    saoX','tensaoY','corteXY',...
30 -     'U','Ux','Uy','Uu')
31 -
32 -     %escolha da mediana a
    fixar
33 -     if ix==1
34 -         X0=Xi;
35 -         Y0=Yi;
36 -     elseif iy==1
37 -         Y0=Yi;
38 -         X0=Xi;
39 -     end
40 -     %função que trata do
    design da malha
41 -     [nn,ngl,nel,glpe,npe,coor
    denadasX,coordenadasY] =
    MapaDeNos...
42 -     (comprimento,largura,xe,X
    0,Y0,r,erro);
43 -     %nn= numero total de nós
44 -     %ngl= numero total de
    graus de liberdade
45 -     %nel= numero total de
    elementos
46 -     %glpe= graus de liberdade
    de cada elemento de todos os
    elementos
47 -     %npe= n° dos nos de cada
    elemento de todos os elementos
48 -     %coordenadasX e Y =
    coordenadas dos nos de cada
    elemento de todos os
49 -     %elementos
50 -
51 -     %cálculo da matriz
    rigidez global
52 -     [K,B,D]=matrizrigidez(E,u
    ,ngl,glpe,nel,coordenadasX,coorde
    nadasY);
53 -     %K = matriz rigidez
    global
54 -     %B = matriz deformação-
    deslocamento
55 -     %D = matriz elastecidade
56 -
57 -     %aplicar força 100kN no
    lado direito e lado esquerdo da
    placa
58 -     forca=
    forca(t,coordenadasX,coordenadasY
    ,ngl,largura,comprimento,npe);
59 -     %forca = matriz que
    contém forças aplcadas em cada
    grau de liberdade
60 -
61 -     %fixar nós intermédios de
    cada aresta
62 -     glfixos=fronteira(coorden
    adasY,coordenadasX,largura,compri
    mento,npe);
63 -     %glfixos = matriz que
    contém graus de liberdade (gdl) a
    fixar e as
64 -     %respetivas limitações de
    deslocamentos
65 -     [y,x]=size(glfixos);
66 -     %inserir condicoes
    fronteiras
67 -     for i=1:x
68 -         K(glfixos(1,i),:)=0;
69 -         %linha igual a zero
70 -         K(:,glfixos(1,i))=0; %
    coluna igual a zero
71 -         K(glfixos(1,i),glfixos(1,
    i))=1; %evitar indeterminacoes
72 -         forca(glfixos(1,i))=glfix
    os(2,i); %força não influencia
    nós fixos
73 -     end
74 -     %matriz deslocamentos
    global
75 -     U=K\forca;
76 -     %matriz deslocamentos por
    componente
77 -     Ux=U(1:2:ngl);
78 -     Uy=U(2:2:ngl);
79 -     %matriz vetores
    deslocamento
80 -     for i=1:nn
81 -         Uu(i,1)=sqrt(Ux(i,1)^2+Uy
    (i,1)^2);
82 -     end
83 -     %criação matriz dos
    deslocamentos de cada nó de cada
    elemento de todos

```

```

84 - %os elementos
85 - [nel,gl]=size(glpe);
86 - Ue=zeros(gl,nel);
87 - for i=1:size(U)
88 -     for j=1:nel
89 -         for q=1:gl
90 -             if i==glpe(j,q)
91 -                 Ue(q,j)=U(i,1);
92 -             %matriz deslocamentos por
93 -             elemento
94 -         end
95 -     end
96 -     %cálculo das tensões por
97 -     elemento
98 -     for i=1:nel
99 -         e=B{i,1}*Ue(:,i);
100 -         %deformação
101 -         tensaoE=D*e; %tensão
102 -         tensaoX(i)=tensaoE(1,1);
103 -         %tensão em X
104 -         tensaoY(i)=tensaoE(2,1);
105 -         %tensão em Y
106 -         corteXY(i)=tensaoE(3,1);
107 -         %tensão de corte XY
108 -     end
109 -
110 -     [maxX,elmX]=max(tensaoX);
111 -     %obter valor e localização da
112 -     tensão máxima
113 -
114 -     if (maxF-maxX)>0
115 -         X1=X0;
116 -         Y1=Y0;
117 -         maxF=maxX;
118 -     end
119 -
120 -     play=play+1;
121 -     lista(play,1)=maxX;
122 -     lista(play,2)=X0;
123 -     lista(play,3)=Y0;
124 -     fprintf('\n----- %d -----\n',play)
125 -     %avançar o furo
126 -     if X0<=(comprimento-xe-r-
127 -         0.2)
128 -         X0=X0+0.4;
129 -         ix=2;
130 -         Y0=Yi;
131 -         stop1=0;
132 -     else
133 -         Yi=Y0+0.3;
134 -         X0=Xi;
135 -         stop1=0.5;
136 -         fprintf('next')
137 -     end
138 -     if Y0>(largura-xe-r-0.2)
139 -         stop2=0.5;
140 -     end
141 -
142 -     %sinal que já se
143 -     percorreu todas as posições
144 -     stop=stop1+stop2;
145 -     end
146 -
147 -     %Apresentação da posição
148 -     escolhida
149 -     lista(play+2,1)=maxF;
150 -     lista(play+2,2)=X1;
151 -     lista(play+2,3)=Y1;

```

## MapaDeNos.m

```

1 - function
    [nn,ngl,nel,glpe,npe,XX,YY]=
    MapaDeNos(C,L,xe,X0,Y0,r,erro)
2 -
3 - %limpar variáveis com valores da
    análise anterior
4 - clear
    ('nn','ngl','nel','glpe','npe','X
    X','YY')
5 -
6 - [X,Y]=coordenadas_polar(C,L,xe,X0
    ,Y0,r,erro);
7 -
8 - XX=X';
9 - YY=Y';
10 -
11 - [lin,col]=size(X);
12 - npe=zeros(col,lin);
13 - a=1;
14 -
15 - for i=1:col
16 -     for j=1:lin
17 -         if npe(i,j)==0
18 -             npe(i,j)=a;
19 -             [x1,x2]=find((X(j,i)-
                erro)<X & X<(X(j,i)+erro));
20 -             [y1,y2]=find((Y(j,i)-
                erro)<Y & Y<(Y(j,i)+erro));
21 -             for k=1:size(x1)
22 -                 for q=1:size(y1)
23 -                     if x1(k,1)==y1(q,1) &&
                        x2(k,1)==y2(q,1) && ...
24 -                         npe(x2(k,1),x1(k,1))==0
25 -                         npe(x2(k,1),x1(k,1))=a;
26 -                     end
27 -                 end
28 -             end
29 -             a=a+1;
30 -         end
31 -     end
32 - end
33 -
34 - indice=max(npe,[],2);
35 - nn=max(indice,[],1);
36 -
37 - [nne,nel]=size(X);
38 - for i=1:nel;
39 -     for j=1:nne
40 -         glpe(i,j*2-1)=npe(i,j)*2-
1;
41 -         glpe(i,j*2)=npe(i,j)*2;
42 -     end
43 - end
44 -
45 - indice=max(glpe,[],2);
46 - ngl=max(indice,[],1);
47 - end

```

## coordenadas\_polar.m

```

1 - function
    [X,Y]=coordenadas_polar(C,L,xe,X0,Y0
    ,r,erro)
2 - %limpar variáveis com valores da
    análise anterior
3 - clear ('X','Y')
4 -
5 - %programa com a função de criar duas
    matrizes com
6 - %todos os elementos da placa furada
7 - %- X, com todas as abcissas dos 4
    nós de cada elemento
8 - %- Y, com todas as ordenadas dos 4
    nos de cada elemento
9 -
10 - %limite max da box à volta do furo
11 - a=[C-X0;X0;L-Y0;Y0];
12 - [pmax,local]=min(a);
13 -
14 - %numero de divisoes por oitavo de
    circunferência
15 - ndiv=9;
16 - %numero total de divisões por
    circunferência
17 - ntotal=ndiv*8;
18 -
19 - k=1;
20 - b=1;
21 - %1º oitavo do quadrado que contém a
    reta
22 - for j=1:ndiv
23 -     a=1;
24 -     c=1;
25 -     for p=r:xe:pmax-xe
26 -         c=c+1;
27 -         if p==r
28 -             ax=(p)*sin((2*pi)*((j-1)/ntotal));
29 -             bx=(p+xe)*tan((2*pi)*((j-
                1)/ntotal));
30 -             cx=(p+xe)*tan((2*pi)*((j)/ntotal));
31 -             dx=p*sin((2*pi)*((j)/ntotal));
32 -
33 -             ay=(p)*cos((2*pi)*((j-1)/ntotal));
34 -             by=p+xe;
35 -             cy=p+xe;
36 -             dy=p*cos((2*pi)*((j)/ntotal));
37 -         else
38 -             ax=(p)*tan((2*pi)*((j-1)/ntotal));
39 -             bx=(p+xe)*tan((2*pi)*((j-
                1)/ntotal));
40 -             cx=(p+xe)*tan((2*pi)*((j)/ntotal));
41 -             dx=p*tan((2*pi)*((j)/ntotal));
42 -
43 -             ay=p;
44 -             by=p+xe;
45 -             cy=p+xe;
46 -             dy=p;
47 -         end
48 -
49 -         X(1,k)=ax;
50 -         X(2,k)=bx;
51 -         X(3,k)=cx;
52 -         X(4,k)=dx;
53 -
54 -         Y(1,k)=ay;
55 -         Y(2,k)=by;
56 -         Y(3,k)=cy;
57 -         Y(4,k)=dy;
58 -
59 -         k=k+1;

```

```

60 - end
61 - c=pmax-(p+xe);
62 - if c~=0
63 - X(1,k-1)=(p)*tan((2*pi)*((j-1)/ntotal));
64 - X(2,k-1)=(p+xe+c)*tan((2*pi)*((j-1)/ntotal));
65 - X(3,k-1)=(p+xe+c)*tan((2*pi)*((j)/ntotal));
66 - X(4,k-1)=(p)*tan((2*pi)*((j)/ntotal));
67 -
68 - Y(1,k-1)=p;
69 - Y(2,k-1)=p+xe+c;
70 - Y(3,k-1)=p+xe+c;
71 - Y(4,k-1)=p;
72 - end
73 - fronteira(1,b)=X(3,k-1);
74 - b=b+1;
75 - end
76 - %espelho relativamente a reta y=x
    (finalização do 1º quarto)
77 - [lin,col]=size(X);
78 - for i= 1:lin
79 - for j=0:col-1
80 - X(i,col+j+1)=Y(i,col-j);
81 - Y(i,col+j+1)=X(i,col-j);
82 - end
83 - end
84 - %corrigir sequência de nós
85 - for j=1:col
86 - X4=X(2,col+j);
87 - X2=X(4,col+j);
88 - X(2,col+j)=X2;
89 - X(4,col+j)=X4;
90 -
91 - Y4=Y(2,col+j);
92 - Y2=Y(4,col+j);
93 - Y(2,col+j)=Y2;
94 - Y(4,col+j)=Y4;
95 - end
96 - %espelho para baixo=1ª metade
97 - [lin,col]=size(X);
98 - for i= 1:lin
99 - for j=1:col
100 - X(i,col+j)=X(i,j);
101 - Y(i,col+j)=-Y(i,j);
102 - end
103 - end
104 - %corrigir sequência de nós
105 - for j=1:col
106 - X4=X(3,col+j);
107 - X2=X(1,col+j);
108 - X1=X(2,col+j);
109 - X3=X(4,col+j);
110 - X(2,col+j)=X2;
111 - X(4,col+j)=X4;
112 - X(3,col+j)=X3;
113 - X(1,col+j)=X1;
114 -
115 - Y4=Y(3,col+j);
116 - Y2=Y(1,col+j);
117 - Y1=Y(2,col+j);
118 - Y3=Y(4,col+j);
119 - Y(2,col+j)=Y2;
120 - Y(4,col+j)=Y4;
121 - Y(3,col+j)=Y3;
122 - Y(1,col+j)=Y1;
123 - end
124 - %espelho para esquerda=quadrado
    completo
125 - [lin,col]=size(X);
126 - for i= 1:lin

```

```

127 - for j=1:col
128 - X(i,col+j)=-X(i,j);
129 - Y(i,col+j)=Y(i,j);
130 - end
131 - end
132 - %corrigir sequência de nós
133 - for j=1:col
134 - X2=X(3,col+j);
135 - X4=X(1,col+j);
136 - X3=X(2,col+j);
137 - X1=X(4,col+j);
138 - X(2,col+j)=X2;
139 - X(4,col+j)=X4;
140 - X(3,col+j)=X3;
141 - X(1,col+j)=X1;
142 -
143 - Y2=Y(3,col+j);
144 - Y4=Y(1,col+j);
145 - Y3=Y(2,col+j);
146 - Y1=Y(4,col+j);
147 - Y(2,col+j)=Y2;
148 - Y(4,col+j)=Y4;
149 - Y(3,col+j)=Y3;
150 - Y(1,col+j)=Y1;
151 - end
152 - %introdução do furo localização
    real na placa
153 - [lin,col]=size(X);
154 - for j=1:col
155 - for i=1:lin
156 - X(i,j)=X0+X(i,j);
157 - Y(i,j)=Y0+Y(i,j);
158 - end
159 - end
160 -
161 - %resto da placa:
162 - div1=0;div2=0;div3=0;div4=0;
163 - x1=0;x2=0;y1=0;y2=0;
164 - cima=0;baixo=0;direita=0;esquerda
    =0;
165 - %parte de baixo
166 - if local~=4
167 - y1=Y0-pmax;
168 - t=fix(y1/xe);
169 - t2=fix(y1/xe+erro);
170 - if t~=t2
171 - t=t2;
172 - end
173 - div1=y1-(xe*t);
174 - if (1-div1)==1 || (1-(div1-
    0.1))==1
175 - div1=0;
176 - end
177 - baixo=t;
178 - [lin,col]=size(X);
179 - k=col+1;
180 - [w1,w]=size(fronteira);
181 - for j=1:(w*2)
182 - a=0;
183 - for i=0:(t-1)
184 - if j<w
185 - X(1,k)=-fronteira(w-j+1)+X0;
186 - X(2,k)=-fronteira(w-j+1)+X0;
187 - X(3,k)=-fronteira(w-j)+X0;
188 - X(4,k)=-fronteira(w-j)+X0;
189 - else if j==w
190 - X(1,k)=-fronteira(w-j+1)+X0;
191 - X(2,k)=-fronteira(w-j+1)+X0;
192 - X(3,k)=X0;
193 - X(4,k)=X0;
194 - else if j==(w+1)
195 - X(1,k)=X0;
196 - X(2,k)=X0;
197 - X(3,k)=fronteira(j-w)+X0;

```

```

198 - X(4,k)=fronteira(j-w)+X0;
199 - else
200 - X(1,k)=fronteira(j-w-1)+X0;
201 - X(2,k)=fronteira(j-w-1)+X0;
202 - X(3,k)=fronteira(j-w)+X0;
203 - X(4,k)=fronteira(j-w)+X0;
204 - end
205 - end
206 - end
207 -
208 - Y(1,k)=a;
209 - Y(2,k)=a+xe;
210 - Y(3,k)=a+xe;
211 - Y(4,k)=a;
212 -
213 - k=k+1;
214 -
215 - a=a+xe;
216 - end
217 - if div1~=0
218 - if j<w
219 - X(1,k-1)=-fronteira(w-j+1)+X0;
220 - X(2,k-1)=-fronteira(w-j+1)+X0;
221 - X(3,k-1)=-fronteira(w-j)+X0;
222 - X(4,k-1)=-fronteira(w-j)+X0;
223 - else if j==w
224 - X(1,k-1)=-fronteira(w-j+1)+X0;
225 - X(2,k-1)=-fronteira(w-j+1)+X0;
226 - X(3,k-1)=X0;
227 - X(4,k-1)=X0;
228 - else if j==(w+1)
229 - X(1,k-1)=X0;
230 - X(2,k-1)=X0;
231 - X(3,k-1)=fronteira(j-w)+X0;
232 - X(4,k-1)=fronteira(j-w)+X0;
233 - else
234 - X(1,k-1)=fronteira(j-w-1)+X0;
235 - X(2,k-1)=fronteira(j-w-1)+X0;
236 - X(3,k-1)=fronteira(j-w)+X0;
237 - X(4,k-1)=fronteira(j-w)+X0;
238 - end
239 - end
240 - end
241 -
242 - Y(1,k-1)=a-xe;
243 - Y(2,k-1)=a+div1;
244 - Y(3,k-1)=a+div1;
245 - Y(4,k-1)=a-xe;
246 -
247 - end
248 - end
249 - end
250 -
251 - %parte de cima
252 - if local~=3
253 - y2=L-Y0-pmax;
254 - t=fix(y2/xe);
255 - t2=fix(y2/xe+erro);
256 - if t~=t2
257 - t=t2;
258 - end
259 - div2=y2-(xe*t);
260 - if (1-div2)==1 || (1-(div2-
0.1))==1
261 - div2=0;
262 - end
263 - cima=t;
264 - [lin,col]=size(X);
265 - k=col+1;
266 - [w1,w]=size(fronteira);
267 - for j=1:(w*2)
268 - a=0;
269 - for i=0:(t-1)
270 - if j<w

```

```

271 - X(1,k)=-fronteira(w-j+1)+X0;
272 - X(2,k)=-fronteira(w-j+1)+X0;
273 - X(3,k)=-fronteira(w-j)+X0;
274 - X(4,k)=-fronteira(w-j)+X0;
275 - else if j==w
276 - X(1,k)=-fronteira(w-j+1)+X0;
277 - X(2,k)=-fronteira(w-j+1)+X0;
278 - X(3,k)=X0;
279 - X(4,k)=X0;
280 - else if j==(w+1)
281 - X(1,k)=X0;
282 - X(2,k)=X0;
283 - X(3,k)=fronteira(j-w)+X0;
284 - X(4,k)=fronteira(j-w)+X0;
285 - else
286 - X(1,k)=fronteira(j-w-1)+X0;
287 - X(2,k)=fronteira(j-w-1)+X0;
288 - X(3,k)=fronteira(j-w)+X0;
289 - X(4,k)=fronteira(j-w)+X0;
290 - end
291 - end
292 - end
293 -
294 - Y(1,k)=a+Y0+pmax;
295 - Y(2,k)=a+xe+Y0+pmax;
296 - Y(3,k)=a+xe+Y0+pmax;
297 - Y(4,k)=a+Y0+pmax;
298 -
299 - k=k+1;
300 -
301 - a=a+xe;
302 - end
303 - if div2~=0
304 - if j<w
305 - X(1,k-1)=-fronteira(w-j+1)+X0;
306 - X(2,k-1)=-fronteira(w-j+1)+X0;
307 - X(3,k-1)=-fronteira(w-j)+X0;
308 - X(4,k-1)=-fronteira(w-j)+X0;
309 - else if j==w
310 - X(1,k-1)=-fronteira(w-j+1)+X0;
311 - X(2,k-1)=-fronteira(w-j+1)+X0;
312 - X(3,k-1)=X0;
313 - X(4,k-1)=X0;
314 - else if j==(w+1)
315 - X(1,k-1)=X0;
316 - X(2,k-1)=X0;
317 - X(3,k-1)=fronteira(j-w)+X0;
318 - X(4,k-1)=fronteira(j-w)+X0;
319 - else
320 - X(1,k-1)=fronteira(j-w-1)+X0;
321 - X(2,k-1)=fronteira(j-w-1)+X0;
322 - X(3,k-1)=fronteira(j-w)+X0;
323 - X(4,k-1)=fronteira(j-w)+X0;
324 - end
325 - end
326 - end
327 -
328 - Y(1,k-1)=a-xe+Y0+pmax;
329 - Y(2,k-1)=a+Y0+pmax+div2;
330 - Y(3,k-1)=a+Y0+pmax+div2;
331 - Y(4,k-1)=a-xe+Y0+pmax;
332 -
333 - end
334 - end
335 - end
336 -
337 - %parte da esquerda
338 - if local~=2
339 - x1=X0-pmax;
340 - t=fix(x1/xe);
341 - t2=fix(x1/xe+erro);
342 - if t~=t2
343 - t=t2;
344 - end

```



```

345 - div3=x1-(xe*t);
346 - if (1-div3)==1.0000 || 1-(div3-
    0.1)==1
347 -     div3=0;
348 - end
349 - esquerda=t;
350 - [lin,col]=size(X);
351 - k=col+1;
352 - [w1,w]=size(frenteira);
353 - for j=1:(w*2)
354 -     a=0;
355 -     for i=0:(t-1)
356 -         if j<w
357 -             Y(1,k)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
358 -             Y(4,k)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
359 -             Y(3,k)=-frenteira(w-j)+Y0;
360 -             Y(2,k)=-frenteira(w-j)+Y0;
361 -         else if j==w
362 -             Y(1,k)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
363 -             Y(4,k)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
364 -             Y(3,k)=Y0;
365 -             Y(2,k)=Y0;
366 -         else if j==(w+1)
367 -             Y(1,k)=Y0;
368 -             Y(4,k)=Y0;
369 -             Y(3,k)=frenteira(j-w)+Y0;
370 -             Y(2,k)=frenteira(j-w)+Y0;
371 -         else
372 -             Y(1,k)=frenteira(j-w-1)+Y0;
373 -             Y(2,k)=frenteira(j-w)+Y0;
374 -             Y(3,k)=frenteira(j-w)+Y0;
375 -             Y(4,k)=frenteira(j-w-1)+Y0;
376 -         end
377 -     end
378 - end
379 -
380 - X(1,k)=a;
381 - X(2,k)=a;
382 - X(3,k)=a+xe;
383 - X(4,k)=a+xe;
384 -
385 - k=k+1;
386 -
387 - a=a+xe;
388 - end
389 -
390 - if div3~=0
391 -     if j<w
392 -         Y(1,k-1)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
393 -         Y(4,k-1)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
394 -         Y(3,k-1)=-frenteira(w-j)+Y0;
395 -         Y(2,k-1)=-frenteira(w-j)+Y0;
396 -     else if j==w
397 -         Y(1,k-1)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
398 -         Y(4,k-1)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
399 -         Y(3,k-1)=Y0;
400 -         Y(2,k-1)=Y0;
401 -     else if j==(w+1)
402 -         Y(1,k-1)=Y0;
403 -         Y(4,k-1)=Y0;
404 -         Y(3,k-1)=frenteira(j-w)+Y0;
405 -         Y(2,k-1)=frenteira(j-w)+Y0;
406 -     else
407 -         Y(1,k-1)=frenteira(j-w-1)+Y0;
408 -         Y(2,k-1)=frenteira(j-w)+Y0;
409 -         Y(3,k-1)=frenteira(j-w)+Y0;
410 -         Y(4,k-1)=frenteira(j-w-1)+Y0;
411 -     end
412 - end
413 - end
414 -
415 - X(1,k-1)=a-xe;
416 - X(2,k-1)=a-xe;
417 - X(3,k-1)=a+div3;

```

```

418 - X(4,k-1)=a+div3;
419 -
420 - end
421 - end
422 - end
423 -
424 - %parte da direita
425 - if local~=1
426 -     x2=C-X0-pmax;
427 -     t=fix(x2/xe);
428 -     t2=fix(x2/xe+erro);
429 -     if t~=t2
430 -         t=t2;
431 -     end
432 -     div4=x2-(xe*t);
433 -     if (1-div4)==1 || 1-(div4-0.1)==1
434 -         div4=0;
435 -     end
436 -     direita=t;
437 -     [lin,col]=size(X);
438 -     k=col+1;
439 -     [w1,w]=size(frenteira);
440 -     for j=1:(w*2)
441 -         a=0;
442 -         for i=0:(t-1)
443 -             if j<w
444 -                 Y(1,k)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
445 -                 Y(4,k)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
446 -                 Y(3,k)=-frenteira(w-j)+Y0;
447 -                 Y(2,k)=-frenteira(w-j)+Y0;
448 -             else if j==w
449 -                 Y(1,k)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
450 -                 Y(4,k)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
451 -                 Y(3,k)=Y0;
452 -                 Y(2,k)=Y0;
453 -             else if j==(w+1)
454 -                 Y(1,k)=Y0;
455 -                 Y(4,k)=Y0;
456 -                 Y(3,k)=frenteira(j-w)+Y0;
457 -                 Y(2,k)=frenteira(j-w)+Y0;
458 -             else
459 -                 Y(1,k)=frenteira(j-w-1)+Y0;
460 -                 Y(2,k)=frenteira(j-w)+Y0;
461 -                 Y(3,k)=frenteira(j-w)+Y0;
462 -                 Y(4,k)=frenteira(j-w-1)+Y0;
463 -             end
464 -         end
465 -     end
466 -
467 -     X(1,k)=a+X0+pmax;
468 -     X(2,k)=a+X0+pmax;
469 -     X(3,k)=a+xe+X0+pmax;
470 -     X(4,k)=a+xe+X0+pmax;
471 -
472 -     k=k+1;
473 -
474 -     a=a+xe;
475 - end
476 - if div4~=0
477 -     if j<w
478 -         Y(1,k-1)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
479 -         Y(4,k-1)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
480 -         Y(3,k-1)=-frenteira(w-j)+Y0;
481 -         Y(2,k-1)=-frenteira(w-j)+Y0;
482 -     else if j==w
483 -         Y(1,k-1)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
484 -         Y(4,k-1)=-frenteira(w-j+1)+Y0;
485 -         Y(3,k-1)=Y0;
486 -         Y(2,k-1)=Y0;
487 -     else if j==(w+1)
488 -         Y(1,k-1)=Y0;
489 -         Y(4,k-1)=Y0;
490 -         Y(3,k-1)=frenteira(j-w)+Y0;
491 -         Y(2,k-1)=frenteira(j-w)+Y0;

```

```

492 - else
493 - Y(1,k-1)=fronteira(j-w-1)+Y0;
494 - Y(2,k-1)=fronteira(j-w)+Y0;
495 - Y(3,k-1)=fronteira(j-w)+Y0;
496 - Y(4,k-1)=fronteira(j-w-1)+Y0;
497 - end
498 - end
499 - end
500 - X(1,k-1)=a-xe+X0+pmax;
501 - X(2,k-1)=a-xe+X0+pmax;
502 - X(3,k-1)=a+div4+X0+pmax;
503 - X(4,k-1)=a+div4+X0+pmax;
504 - end
505 - end
506 - end
507 -
508 - %parte superior esquerda
509 - [lin,col]=size(X);
510 - k=col+1;
511 - for i=0:xe:x1
512 - if (i<(x1-div3) || div3==0) &&
i<=(x1-xe+erro)
513 - jj=0;
514 - for j=(L-y2):xe:(L-xe)+erro
515 - X(1,k)=i;
516 - X(2,k)=i;
517 - X(3,k)=i+xe;
518 - X(4,k)=i+xe;
519 -
520 - Y(1,k)=j;
521 - Y(2,k)=j+xe;
522 - Y(3,k)=j+xe;
523 - Y(4,k)=j;
524 -
525 - k=k+1;
526 - jj=jj+1;
527 - end
528 - if div2~=0
529 - X(1,k-1)=i;
530 - X(2,k-1)=i;
531 - X(3,k-1)=i+xe;
532 - X(4,k-1)=i+xe;
533 -
534 - Y(1,k-1)=j;
535 - Y(2,k-1)=j+xe+div2;
536 - Y(3,k-1)=j+xe+div2;
537 - Y(4,k-1)=j;
538 - end
539 - else if div3~=0
540 - for j=(L-y2):xe:(L-xe)+erro
541 - jj=jj-1;
542 -
543 - X(1,k-jj-1)=i-xe;
544 - X(2,k-jj-1)=i-xe;
545 - X(3,k-jj-1)=i+div3;
546 - X(4,k-jj-1)=i+div3;
547 -
548 - Y(1,k-jj-1)=j;
549 - Y(2,k-jj-1)=j+xe;
550 - Y(3,k-jj-1)=j+xe;
551 - Y(4,k-jj-1)=j;
552 - end
553 - if div2~=0
554 - X(1,k-1)=i-xe;
555 - X(2,k-1)=i-xe;
556 - X(3,k-1)=i+div3;
557 - X(4,k-1)=i+div3;
558 -
559 - Y(1,k-1)=j;
560 - Y(2,k-1)=j+xe+div2;
561 - Y(3,k-1)=j+xe+div2;
562 - Y(4,k-1)=j;
563 -
564 - end

```

```

565 - end
566 - end
567 -
568 - end
569 -
570 - %parte inferior esquerda
571 - [lin,col]=size(X);
572 - k=col+1;
573 - for i=0:xe:(x1)
574 - if (i<(x1-div3) || div3==0) &&
i<=x1-xe+erro
575 - jj=0;
576 - for j=0:xe:(y1-xe)+erro
577 - X(1,k)=i;
578 - X(2,k)=i;
579 - X(3,k)=i+xe;
580 - X(4,k)=i+xe;
581 -
582 - Y(1,k)=j;
583 - Y(2,k)=j+xe;
584 - Y(3,k)=j+xe;
585 - Y(4,k)=j;
586 -
587 - k=k+1;
588 - jj=jj+1;
589 - end
590 - if div1~=0
591 - X(1,k-1)=i;
592 - X(2,k-1)=i;
593 - X(3,k-1)=i+xe;
594 - X(4,k-1)=i+xe;
595 -
596 - Y(1,k-1)=j;
597 - Y(2,k-1)=j+xe+div1;
598 - Y(3,k-1)=j+xe+div1;
599 - Y(4,k-1)=j;
600 -
601 - end
602 - else if div3~=0
603 - for j=0:xe:(y1-xe)+erro
604 - jj=jj-1;
605 - X(1,k-jj-1)=i-xe;
606 - X(2,k-jj-1)=i-xe;
607 - X(3,k-jj-1)=i+div3;
608 - X(4,k-jj-1)=i+div3;
609 -
610 - Y(1,k-jj-1)=j;
611 - Y(2,k-jj-1)=j+xe;
612 - Y(3,k-jj-1)=j+xe;
613 - Y(4,k-jj-1)=j;
614 - end
615 - if div1~=0
616 - X(1,k-1)=i-xe;
617 - X(2,k-1)=i-xe;
618 - X(3,k-1)=i+div3;
619 - X(4,k-1)=i+div3;
620 -
621 - Y(1,k-1)=j;
622 - Y(2,k-1)=j+xe+div1;
623 - Y(3,k-1)=j+xe+div1;
624 - Y(4,k-1)=j;
625 - end
626 - end
627 - end
628 - end
629 -
630 - %parte superior direita
631 - [lin,col]=size(X);
632 - k=col+1;
633 - for i=(C-x2):xe:C
634 - if (i<(C-div4) || div4==0) &&
i<=C-xe+erro
635 - jj=0;
636 - for j=(L-y2):xe:(L-xe)+erro

```

```

637 - X(1,k)=i;
638 - X(2,k)=i;
639 - X(3,k)=i+xe;
640 - X(4,k)=i+xe;
641 -
642 - Y(1,k)=j;
643 - Y(2,k)=j+xe;
644 - Y(3,k)=j+xe;
645 - Y(4,k)=j;
646 -
647 - k=k+1;
648 - jj=jj+1;
649 - end
650 - if div2~=0
651 - X(1,k-1)=i;
652 - X(2,k-1)=i;
653 - X(3,k-1)=i+xe;
654 - X(4,k-1)=i+xe;
655 -
656 - Y(1,k-1)=j;
657 - Y(2,k-1)=j+xe+div2;
658 - Y(3,k-1)=j+xe+div2;
659 - Y(4,k-1)=j;
660 - end
661 - elseif div4~=0
662 - for j=(L-y2):xe:(L-xe)+erro
663 - jj=jj-1;
664 -
665 - X(1,k-jj-1)=i-xe;
666 - X(2,k-jj-1)=i-xe;
667 - X(3,k-jj-1)=i+div4;
668 - X(4,k-jj-1)=i+div4;
669 -
670 - Y(1,k-jj-1)=j;
671 - Y(2,k-jj-1)=j+xe;
672 - Y(3,k-jj-1)=j+xe;
673 - Y(4,k-jj-1)=j;
674 - end
675 - if div2~=0
676 - X(1,k-1)=i-xe;
677 - X(2,k-1)=i-xe;
678 - X(3,k-1)=i+div4;
679 - X(4,k-1)=i+div4
680 -
681 - Y(1,k-1)=j;
682 - Y(2,k-1)=j+xe+div2;
683 - Y(3,k-1)=j+xe+div2;
684 - Y(4,k-1)=j;
685 - end
686 - end
687 - end
688 -
689 - %parte inferior direita
690 - [lin,col]=size(X);
691 - k=col+1;
692 - for i=(C-x2):xe:(C)
693 - if (i<(C-div4) || div4==0) &&
i<=C-xe+erro
694 - jj=0;
695 - for j=0:xe:(y1-xe)+erro
696 - X(1,k)=i;
697 - X(2,k)=i;
698 - X(3,k)=i+xe;
699 - X(4,k)=i+xe;
700 -
701 - Y(1,k)=j;
702 - Y(2,k)=j+xe;
703 - Y(3,k)=j+xe;
704 - Y(4,k)=j;
705 -
706 - k=k+1;
707 - jj=jj+1;
708 - end
709 - if div1~=0

```

```

710 - X(1,k-1)=i;
711 - X(2,k-1)=i;
712 - X(3,k-1)=i+xe;
713 - X(4,k-1)=i+xe;
714 -
715 - Y(1,k-1)=j;
716 - Y(2,k-1)=j+xe+div1;
717 - Y(3,k-1)=j+xe+div1;
718 - Y(4,k-1)=j;
719 - end
720 - elseif div4~=0
721 - for j=0:xe:(y1-xe)+erro
722 - jj=jj-1;
723 -
724 - X(1,k-jj-1)=i-xe;
725 - X(2,k-jj-1)=i-xe;
726 - X(3,k-jj-1)=i+div4;
727 - X(4,k-jj-1)=i+div4;
728 -
729 - Y(1,k-jj-1)=j;
730 - Y(2,k-jj-1)=j+xe;
731 - Y(3,k-jj-1)=j+xe;
732 - Y(4,k-jj-1)=j;
733 - end
734 - if div1~=0
735 - X(1,k-1)=i-xe;
736 - X(2,k-1)=i-xe;
737 - X(3,k-1)=i+div4;
738 - X(4,k-1)=i+div4;
739 -
740 - Y(1,k-1)=j;
741 - Y(2,k-1)=j+xe+div1;
742 - Y(3,k-1)=j+xe+div1;
743 - Y(4,k-1)=j;
744 -
745 - k=k+1;
746 - end
747 - end
748 - end
749 -
750 - %remove erros
751 - [lin,col]=size(X);
752 - for i=1:lin
753 - for j=1:col
754 - if X(i,j)-erro<0
755 - X(i,j)=0;
756 - end
757 - if Y(i,j)-erro<0
758 - Y(i,j)=0;
759 - end
760 - end
761 - end
762 -
763 - end

```

## matrizrigidez.m

```

1 - function
    [K,B,D]=matrizrigidez(E,u,ngl,glpe,n
    el,coordenadasX,coordenadasY)
2 - %limpar variáveis com valores da
    análise anterior
3 - clear ('K','B','D','Ke')
4 -
5 - %matriz D elasticidade
6 - D = (E/(1-u^2))*[1 u 0 ; u 1 0; 0 0
    (1-u)/2];
7 -
8 - K=zeros(ngl,ngl);%matriz rigidez
    global
9 - B=cell(nel,1); %variável onde se irá
    armazenar todas as matrizes B
10 -
11 - for i=1:nel
12 - [Ke,Be,D] =
    matrizrigidezelemento(i,coordenadasX
    ,coordenadasY,D);
13 - for j=1:8
14 - for q=1:8
15 - K(glpe(i,j),glpe(i,q))=K(glpe(i,j),g
    lpe(i,q))+Ke(j,q);
16 - end
17 - end
18 - B{i,1}=Be;
19 - end
20 - end
21 -
22 - function [Ke,Be,D] =
    matrizrigidezelemento(num,coordenada
    sX,coordenadasY,D)
23 -
24 - %limpar variáveis com valores da
    análise anterior
25 - clear ('Ke','Be')
26 -
27 - %Quadratura de Gauss para 2D usando
    a regra 2x2
28 - %pontos
29 - gauss(1,1)=-1/sqrt(3);
30 - gauss(1,2)=-gauss(1,1);
31 - %pesos
32 - gauss(2,1)=1;
33 - gauss(2,2)=1;
34 -
35 - Ke=zeros(8,8); %matriz rigidez de um
    elemento
36 -
37 - for j=1:2 %combinações de todos os
    pontos de gauss
38 - ksi=gauss(1,j);
39 - for a=1:2
40 - eta=gauss(1,a);
41 -
42 - %Funções forma para quadrático de 4
    nós
43 -
44 - S(1)=0.25*(1-ksi)*(1-eta);
45 - S(2)=0.25*(1+ksi)*(1-eta);
46 - S(3)=0.25*(1+ksi)*(1+eta);
47 - S(4)=0.25*(1-ksi)*(1+eta);
48 -
49 - %derivadas da função forma em ordem
    a ksi
50 -
51 - dSksi(1)=-0.25*(1-eta);
52 - dSksi(2)=0.25*(1-eta);
53 - dSksi(3)=0.25*(1+eta);
54 - dSksi(4)=-0.25*(1+eta);
55 - %derivadas da função forma em ordem
    a eta
56 -
57 - dSeta(1)=-0.25*(1-ksi);
58 - dSeta(2)=-0.25*(1+ksi);
59 - dSeta(3)=0.25*(1+ksi);
60 - dSeta(4)=0.25*(1-ksi);
61 -
62 - %Jacobiano do elemento
63 - J=zeros(2,2);
64 - for i= 1: 4 %nº de nos por elemento
65 - J(1,1)=J(1,1)+coordenadasX(num,i)*dS
    ksi(i);
66 - J(1,2)=J(1,2)+coordenadasY(num,i)*dS
    ksi(i);
67 - J(2,1)=J(2,1)+coordenadasX(num,i)*dS
    eta(i);
68 - J(2,2)=J(2,2)+coordenadasY(num,i)*dS
    eta(i);
69 - end
70 -
71 - determinante=det(J); %determinante
72 -
73 - %calcula da matriz A
74 - matrizA=zeros(3,4);
75 - matrizA(1,1)=J(2,2);
76 - matrizA(1,2)=-J(1,2);
77 - matrizA(2,3)=-J(2,1);
78 - matrizA(2,4)=J(1,1);
79 - matrizA(3,1)=-J(2,1);
80 - matrizA(3,2)=J(1,1);
81 - matrizA(3,3)=J(2,2);
82 - matrizA(3,4)=-J(1,2);
83 -
84 - A=(1/determinante)*matrizA;
85 -
86 - %matriz G
87 - G=zeros(4,8);
88 - for i= 1: 4 %nº de nos (u,v) por
    elemento
89 - G(1,1)=G(1,1)+dSksi(1);
90 - G(2,1)=G(2,1)+dSeta(1);
91 - G(3,2)=G(1,1);
92 - G(4,2)=G(2,1);
93 - G(1,3)=G(1,3)+dSksi(2);
94 - G(2,3)=G(2,3)+dSeta(2);
95 - G(3,4)=G(1,3);
96 - G(4,4)=G(2,3);
97 - G(1,5)=G(1,5)+dSksi(3);
98 - G(2,5)=G(2,5)+dSeta(3);
99 - G(3,6)=G(1,5);
100 - G(4,6)=G(2,5);
101 - G(1,7)=G(1,7)+dSksi(4);
102 - G(2,7)=G(2,7)+dSeta(4);
103 - G(3,8)=G(1,7);
104 - G(4,8)=G(2,7);
105 - end
106 -
107 - G=G*0.25; %1/4 é a contante da
    derivada da funcao forma
108 -
109 - %matriz B (strain-displacement
    matrix)
110 - Be=A*G;
111 - %matriz rigidez de um elemento
112 - Ke=Ke+Be'*D*Be*determinante;
113 - end
114 - end
115 -
116 - end

```

## forca.m

```

1 - function
    forca=forca(t,coordenadasX,coordenad
asY,ngl,...
2 - largura,comprimento,npe)
3 -
4 - erro=0.00000001;
5 - %aplicar força 100kN/m no lado
    direito
6 - forca=zeros(ngl,1);
7 - f=(1e5/t);
8 - %selecionar nós e distribuir forças
9 - %lado esquerdo
10 - k=1;
11 - [lin,col]=size(coordenadasX);
12 - for i=1:lin
13 - if coordenadasX(i,1)==0 &&
    coordenadasX(i,2)==0
14 - if coordenadasY(i,2)>=(largura-erro)
15 - nos(k,1)=npe(i,2);%numero do nó
16 - nos(k,2)=coordenadasY(i,2);%coordena
    da da mediana
17 - nos(k,3)=i;%elemento escolhido
18 - k=k+1;
19 - end
20 - nos(k,1)=npe(i,1);
21 - nos(k,2)=coordenadasY(i,1);
22 - nos(k,3)=i;
23 - k=k+1;
24 - end
25 - end
26 - nos=sortrows(nos,2);%ordenar nós por
    coordenadas
27 -
28 - %atribuir força
29 - [lin,col]=size(nos);
30 - fno=zeros(lin,col);
31 - for i=1:(lin-1)
32 - a=(f*(nos(i+1,2)-
    nos(i,2)))/largura;%distribuição das
    forças...
33 - %por fração de aresta
34 - fno(i,1)=nos(i,1);
35 - fno(i,2)=fno(i,2)+(a/2);
36 - fno(i+1,1)=nos(i+1,1);
37 - fno(i+1,2)=fno(i+1,2)+(a/2);
38 - end
39 -
40 - %inserir na matriz no gdl correto
41 - for i=1:lin
42 - forca(fno(i,1)*2-1,1)=fno(i,2);
43 - end
44 -
45 - %lado direito
46 - k=1;
47 - [lin,col]=size(coordenadasX);
48 - for i=1:lin
49 - if coordenadasX(i,3)>=(comprimento-
    erro) && ...
50 - coordenadasX(i,4)>=(comprimento-
    erro)
51 - if coordenadasY(i,3)>=(largura-erro)
52 - nos(k,1)=npe(i,3);
53 - nos(k,2)=coordenadasY(i,3);
54 - nos(k,3)=1;
55 - k=k+1;
56 - end
57 - nos(k,1)=npe(i,4);
58 - nos(k,2)=coordenadasY(i,4);
59 - nos(k,3)=i;
60 - k=k+1;
61 - end
62 - end
63 - nos=sortrows(nos,2);
64 -
65 - %atribuir força
66 - [lin,col]=size(nos);
67 - fno=zeros(lin,col);
68 - for i=1:(lin-1)
69 - a=(-f*(nos(i+1,2)-
    nos(i,2)))/largura;
70 - fno(i,1)=nos(i,1);
71 - fno(i,2)=fno(i,2)+(a/2);
72 - fno(i+1,1)=nos(i+1,1);
73 - fno(i+1,2)=fno(i+1,2)+(a/2);
74 - end
75 -
76 - %inserir na matriz no gdl correto
77 - for i=1:lin
78 - forca(fno(i,1)*2-1,1)=fno(i,2);
79 - end
80 -
81 - end

```

## fronteira.m

```
1 - function
    glfixos=fronteira(coordenadasY,coo
rdenadasX,largura,...
2 - comprimento,npe)
3 - erro=0.000000000001;
4 - [lin,col]=size(coordenadasX);
5 -
6 - %criação das variáveis de controlo
7 - p1=0;p2=0;p3=0;p4=0;
8 - aaa=0;bb=0;cc=0;dd=0;
9 - p=0;
10 - xx=erro;%valor que criará
    intervalo de valores caso não
    haja...
11 - %um nó no ponto intermédio das
    arestas
12 -
13 - while p<4
14 -     w1=(largura/2);
15 -     w2=(comprimento/2);
16 -     for i=1:lin
17 -         if coordenadasX(i,1)==0 && p1==0;
18 -             if coordenadasY(i,1)>=(w1-xx)
19 -                 if coordenadasY(i,1)<=(w1+xx)
20 -                     a=npe(i,1)*2;p1=1;aaa=coordenadasY
                        (i,1);
21 -                 end
22 -             end
23 -         end
24 -         if
            coordenadasX(i,3)>=(comprimento-
            erro) && p2==0
25 -             if coordenadasY(i,3)>=(w1-xx)
26 -                 if coordenadasY(i,3)<=(w1+xx)
27 -                     b=npe(i,3)*2;p2=1;bb=coordenadasY(
                        i,3);
28 -                 end
29 -             end
30 -         end
31 -         if coordenadasY(i,4)==0 && p3==0
32 -             if coordenadasX(i,4)>=(w2-xx)
33 -                 if coordenadasX(i,4)<=(w2+xx)
34 -                     c=npe(i,4)*2-
                        1;p3=1;cc=coordenadasX(i,4);
35 -                 end
36 -             end
37 -         end
38 -         if coordenadasY(i,2)>=(largura-
            erro) && p4==0
39 -             if coordenadasX(i,2)>=(w2-xx)
40 -                 if coordenadasX(i,2)<=(w2+xx)
41 -                     d=npe(i,2)*2-
                        1;p4=1;dd=coordenadasX(i,2);
42 -                 end
43 -             end
44 -         end
45 -     end
46 -     p=p1+p2+p3+p4;
47 -     xx=xx+0.005;
48 - end
49 -
50 - glfixos=[ a b c d]; %graus de
    liberdade a fixar
51 - glfixos(2,:)=0; %valor da
    restrição
52 - glfixos(3,:)= [aaa bb cc dd];
    %coordenada fixada
```